[3점-17년모의평가 6월]

함수 $f(x)=2x-3$에 대하여 $f^{-1}(5)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이○3-

간단한 함수니까 직접 역함수를 구해서 5를 대입해도 되지만..
보통은 이렇게 풀죠.

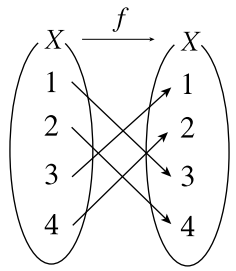
$$f^{-1}(5) = k$$
$$5 = f(k)$$
$$5 = 2k - 3$$
$$8 = 2k$$
$$k = 4$$

답 ④

풀이

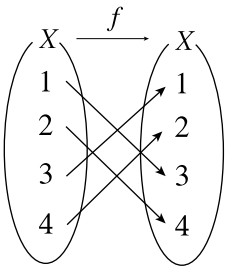
[3점-17년모의평가 6월]

그림은 함수 $f : X \to Y$를 나타낸 것이다.
$f(2)+(f \circ f)(3)$의 값은?



① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

풀이○3−



$f(2)+(f\circ f)(3)$

$=4\ +f(f(3))$

$=4\ +f(\ \ 1\ \ )$

$=4\ +3$

$=7$

답 ⑤

풀이

수219-

[3점-17년모의평가 6월]

$\left(x+\frac{1}{3x}\right)^6$의 전개식에서 x^2의 계수는?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{13}{9}$ ③ $\frac{14}{9}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

풀이 19-

최근 몇 년간 이항정리 문제는
짜장면 시키면 나오는 단무지 같은 느낌이죠.
그냥 기본으로 깔아주는 문제.

$\left(x+\frac{1}{3x}\right)^6$ 의 일반항은

$${}_6\mathrm{C}_r x^{6-r}\left(\frac{1}{3x}\right)^r$$

$$= {}_6\mathrm{C}_r x^{6-r}\left(\frac{1}{3}\right)^r x^{-r}$$

$$= {}_6\mathrm{C}_r \left(\frac{1}{3}\right)^r x^{6-r-r}$$

$$= {}_6\mathrm{C}_r \left(\frac{1}{3}\right)^r x^{6-2r}$$

여기에서 x^2 항은

$$6-2r=2$$

$$r=2$$

$r=2$ 일 때 x^2 항이군요. 따라서 x^2 의 계수는

$${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 15\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{5}{3}$$

답 ④

풀이

[3점-17년모의평가 6월]

전체집합 $U=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\},\ B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$에 대하여 집합 B^C-A^C의 모든 원소의 합은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

풀이○1-

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{1, 2, 3, \quad 6\}$

$B = \{1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9\}$

이니까

$B^C = \{\ 2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10\}$

$A^C = \{\quad 4, 5, \quad 7, 8, 9, 10\}$

$\therefore B^C - A^C = \{2, 6\}$

모든 원소의 합은

$2 + 6 = 8$

답 ①

풀이

미적101-

[3점-17년모의평가 6월]

$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{3^n}\right)\left(a+\frac{1}{2^n}\right)=10$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이○1–

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{3^n}\right)\left(a+\frac{1}{2^n}\right)=10$$

$$(2+0)(a+0)=10$$

$$2a=10$$

$$a=5$$

답 ⑤

풀이

미적111-

[3점-17년모의평가 6월]

함수

$$f(x)=\begin{cases}4x^2-a & (x<1)\\ x^3+a & (x\geq 1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

풀이 11-

$$f(x)=\begin{cases}4x^2-a & (x<1)\\ x^3+a & (x\geq 1)\end{cases}$$

이 '실수 전체'에서 연속이라고 하니

$x=1$에서도 연속이겠지요.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$

이 성립한다는 말이므로

① $f(1)$이 존재.

$$f(1)=1^3+a=\boxed{a+1}$$

② $\lim_{x\to 1} f(x)$가 존재.

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1-}(4x^2-a)=\lim_{x\to 1+}(x^3+a)$$

$$4-a=1+a$$

$$-2a=-3$$

$$a=\frac{3}{2}$$

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$은 확인할 필요도 없이 a가 나와버렸습니다.

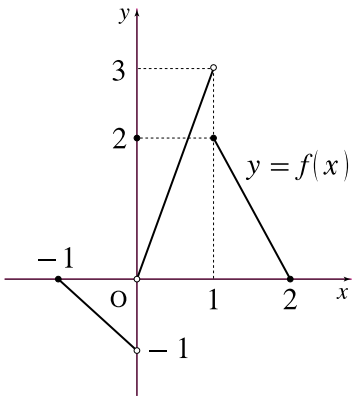
답 ①

풀이

미적111-

[3점-17년모의평가 6월]

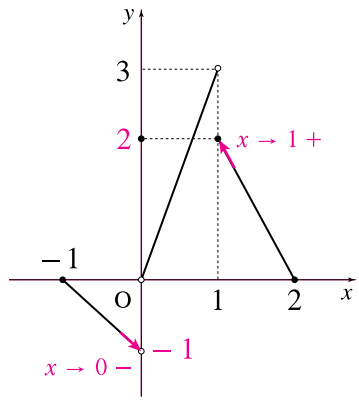
닫힌 구간 $[-1,\ 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 11-



$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$

$= -1 + 2$

$= 1$

답 ①

풀이

[3점-17년모의평가 6월]

자연수 6을 짝수 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

풀이 18-

자연수 6을 '짝수 개'의 자연수로 분할하랍니다.
6을 2개, 4개, 6개의 자연수로 분할하란 말이죠.

① 6을 2개의 자연수로 분할

$6 = 1 + 5$
$= 2 + 4$ ⋯› 3가지
$= 3 + 3$

② 6을 4개의 자연수로 분할

$6 = 1 + 1 + 1 + 3$
$= 1 + 1 + 2 + 2$ ⋯› 2가지

③ 6을 6개의 자연수로 분할

$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ⋯› 1가지

따라서 모든 방법의 수는

$3 + 2 + 1 = 6$ (가지)

답 ②

풀이

[3점-17년모의평가 6월]

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_8 = a_2 + 12, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 15$$

일 때, a_{10}의 값은?

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

풀이 05-

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 첫 번째 힌트는

$$a_8 = a_2 + 12$$
$$\cancel{a} + 7d = \cancel{a} + d + 12$$
$$6d = 12$$
$$d = 2$$

그렇다면 두 번째 힌트는

$$a_1 + a_2 + a_3 = 15$$
$$a + (a + d) + (a + 2d) = 15$$
$$3a + 3d = 15$$
$$3a + 3(2) = 15$$
$$3a = 9$$
$$a = 3$$

따라서

$$a_{10} = a + 9d$$
$$= 3 + 9(2)$$
$$= 21$$

답 ③

풀이

[3점-17년모의평가 6월]

자연수 a에 대한 조건

'모든 양의 실수 x에 대하여 $x-a+4>0$이다.'

가 참인 명제가 되도록 하는 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이○2-

자연수 a에 대한 '조건'이라는 건..
아직은 참, 거짓을 판단할 수 없으나
a에 어떤 값을 집어넣는 순간!
참,거짓을 판단할 수 있는 명제로 변신하는 식을 말합니다.
봅시다.

'모든 양의 실수 x에 대하여 $x-a+4>0$이다.'
$\Longleftrightarrow$ 모든 양의 실수 x에 대하여 $x>a-4$이다.

x는 양수라고 했지만 a가 뭔지 모르니.. 저 부등식이 참인지 거짓인지 판단할 수가 없죠.
a는 자연수라고 했으니.. 일단 $a=1$을 대입하고 생각해 봅시다.

① $a=1$
모든 양의 실수 x에 대하여 $x>1-4$이다.
x가 양의 실수이므로 항상 $x>-3$이지요. 참인 명제입니다.

② $a=2$
모든 양의 실수 x에 대하여 $x>-2$이다. (참인 명제)

③ $a=3$
모든 양의 실수 x에 대하여 $x>-1$이다. (참인 명제)

④ $a=4$
모든 양의 실수 x에 대하여 $x>0$이다. (참인 명제)

⑤ $a=5$
모든 양의 실수 x에 대하여 $x>1$이다.
'모든' 양의 실수 x에 대하여 참인 건 아니죠. (거짓인 명제)

따라서
참인 명제가 되도록 하는 a는 모두 4개.

답 ④

풀이

[3점-17년모의평가 6월]

방정식 $x+y+z+5w=14$를 만족시키는 양의 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는?

① 27 ② 29 ③ 31 ④ 33 ⑤ 35

풀이 17-

어느덧 익숙해져버린 중복조합

$$x+y+z+5w=14$$

비슷한 문제를 몇 번 풀었던 거 같은데..

$x, y, z, 5w$ 중에서 가장 덩치 큰 $5w$에 $w=1, 2, 3, \cdots$를 하나씩 대입하는 걸로 중간분류 했었죠.

① $w=1$일 때

$$x+y+z+5\cdot 1=14$$
$$x+y+z=9$$

$x=X$의 개수,

$y=Y$의 개수,

$z=Z$의 개수라고 하면

$$X\text{의 개수}+Y\text{의 개수}+Z\text{의 개수}=9$$

라고 생각하고 중복조합으로 풀려고 했더니

$$x,\ y,\ z\text{는 자연수}$$

라는 조건이 걸리네요. $X,\ Y,\ Z$를 적어도 하나씩은 꼭 뽑아야 한다는 겁니다.

많이 해봤죠. 이런 거.

$X,\ Y,\ Z$를 미리 하나씩 뽑았다고 생각하면 됩니다.

그러고 나면

$$X\text{의 개수}+Y\text{의 개수}+Z\text{의 개수}=9-3$$
$$X\text{의 개수}+Y\text{의 개수}+Z\text{의 개수}=6$$

이제 $X,\ Y,\ Z$를 중복을 허용하여 6개를 뽑는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{H}_6={}_{3+6-1}\mathrm{C}_6$$
$$={}_8\mathrm{C}_6=\boxed{28}$$

② $w=2$일 때

$$x+y+z+5\cdot 2=14$$
$$x+y+z=4$$

$X,\ Y,\ Z$를 미리 1개씩 뽑아 놓는다고 생각하면

$$x+y+z=4-3$$
$$x+y+z=1$$

$${}_3\mathrm{H}_1={}_{3+1-1}\mathrm{C}_1$$
$$={}_3\mathrm{C}_1=\boxed{3}$$

①, ②에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$28+3=31$$

답 ③

풀이

[4점-17년모의평가 6월]

함수 $y = a\sqrt{x} + 4$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 함수 $y = \sqrt{9x - 18}$의 그래프와 일치하였다.
$a + m + n$의 값은? (단, a, m, n은 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이○4-

평행이동 문제는 예전엔 중딩들이나 풀던 문제입니다.

⋮

뭐.. 그렇다구요.. (#상처받은_자존심#은근_즐기는_건지도)

$y = a\sqrt{x} + 4$

↓ ⋯ x축 방향 m만큼 평행이동

$y = a\sqrt{x-m} + 4$

↓ ⋯ y축 방향 n만큼 평행이동

$y - n = a\sqrt{x-m} + 4$

$\boxed{y = a\sqrt{x-m} + n + 4}$ ⋯➝(i)

이것과 일치한다는 그래프는

$y = \sqrt{9x - 18}$

$\boxed{y = 3\sqrt{x-2}}$ ⋯➝(ii)

(i)과 (ii)를 비교하면

$a = 3,\ m = 2,\ n = -4$

따라서

$a + m + n = 3 + 2 + (-4)$

$= 1$

답 ①

풀이

실수 x에 대한 세 조건

$$p : |x| > 4$$
$$q : x^2 - 9 \le 0$$
$$r : x \le 3$$

에 대하여 〈보기〉에서 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $q \to r$

ㄴ. $p \to \sim q$

ㄷ. $r \to \sim p$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이○2-

'조건'이 세 개 주어졌군요.

조건 p : $|x| > 4$

조건 q : $x^2 - 9 \le 0$

조건 r : $x \le 3$

모든 '조건'에는 그 '조건'을 '참인 명제'가 되게 하는 값이 있고
그 값들로 이루어진 집합을 진리집합이라고 합니다.

진리집합
'조건'을 '참인 명제'가 되도록 하는 값들로 이루어진 집합

조건 p, q, r의 진리집합을 P, Q, R이라 하면

$P = \{x \mid x < -4$ 또는 $x > 4\}$

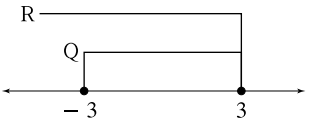
$Q = \{x \mid -3 \le x \le 3\}$

$R = \{x \mid x \le 3\}$

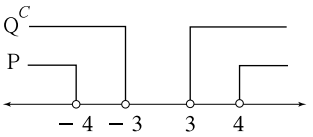
이 진리집합들을 이용해서
'조건으로 이루어진 명제'의 참, 거짓을 따지면 됩니다.

두 조건 p, q의 진리집합을 P, Q라 할 때
$P \subset Q$이면 명제 $p \to q$는 참.
$P \not\subset Q$이면 명제 $p \to q$는 거짓.

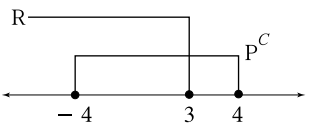
ㄱ. $q \to r$
Q ⊂ R이므로
명제 $q \to r$은 참!



ㄴ. $p \to \sim q$
$P \subset Q^C$이므로
명제 $p \to \sim q$는 참!



ㄷ. $r \to \sim p$
$R \not\subset P^C$이므로
명제 $r \to \sim p$는 거짓!



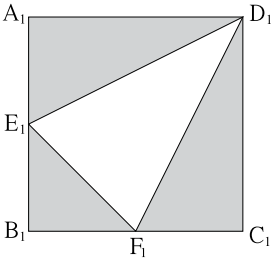
답 ②

풀이

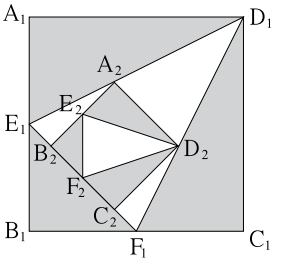
미적106-

[4점-17년모의평가 6월]

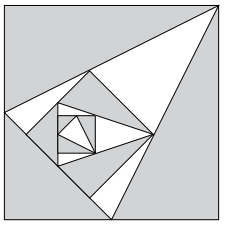
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하자. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 삼각형 $E_1F_1D_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 D_1E_1 위의 점 A_2, 선분 D_1F_1 위의 점 D_2와 선분 E_1F_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형 $E_2F_2D_2$를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부와 삼각형 $E_2F_2D_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2



R_3

① $\frac{125}{37}$ ② $\frac{125}{38}$ ③ $\frac{125}{39}$ ④ $\frac{25}{8}$ ⑤ $\frac{125}{41}$

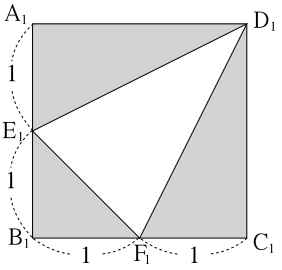
풀이 06-

평가원에서 계속 내겠다는데.. 어쩌겠어요. 풀어야지.

1. $R_1 \to R_2$로 가면서 기존 도형에 새 도형을 추가했으니
R_n의 넓이 S_n는 '수열의 합'일 것이고

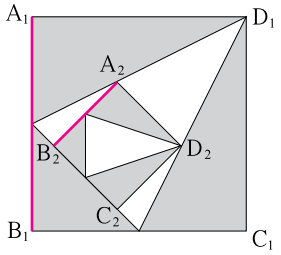
① S_1 : R_1의 넓이

$$S_1 = \triangle A_1E_1D_1 + \triangle E_1B_1F_1 + \triangle C_1D_1F_1$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + 1$$
$$= \boxed{\frac{5}{2}}$$

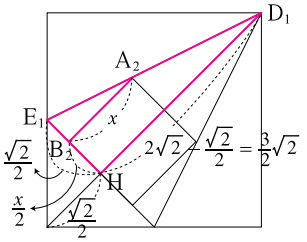


② S_2 : R_2의 넓이

직접 R_2의 넓이를 구할 수도 있으나
계산이 몹시 구질구질하니
$\square A_1B_1C_1D_1$과 $\square A_2B_2C_2D_2$의
닮음비를 이용합시다.



$\overline{A_2B_2} = x$라 놓고
구할 수 있는 길이는 다 구한 후
$\triangle E_1A_2B_2$와 $\triangle E_1D_1H$의
닮음비를 이용하여 x를 구하면



$$x : \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2} \ : \ \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}\right)\cdot \frac{3}{2}\sqrt{2}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{6}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{4}x$$
$$\frac{5\sqrt{2}}{4}x = \frac{3}{2}$$
$$x = \frac{3}{5}\sqrt{2}$$

따라서 $\square A_1B_1C_1D_1$과 $\square A_2B_2C_2D_2$의

닮음비는 $2 \ : \ \frac{3}{5}\sqrt{2}$

넓이비는 $2^2 \ : \ \left(\frac{3}{5}\sqrt{2}\right)^2 = 4 \ : \ \frac{18}{25} = 1 \ : \ \frac{18}{100}$

따라서 추가되는 작은 도형의 넓이는 $\frac{18}{100}S_1$

$\therefore \boxed{S_2 = S_1 + \frac{9}{50}S_1}$

2. 구하는 극한은

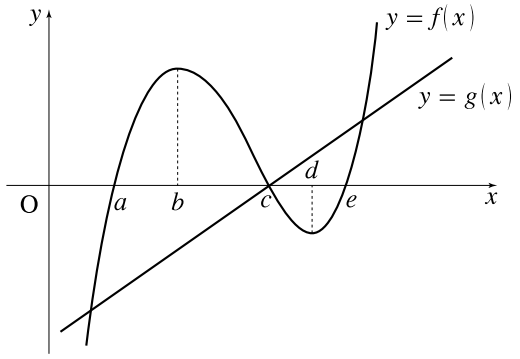
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{S_1 + \frac{9}{50}S_1 + \left(\frac{9}{50}\right)^2 S_1 + \cdots\right\}$$
$$= \frac{S_1}{1 - \frac{9}{50}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{41}{50}} = \frac{250}{82} = \frac{125}{41}$$

답 ⑤

미적118-

[4점-17년모의평가 6월]

삼차함수 $y=f(x)$와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f'(b)=f'(d)=0$이다.



함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=p$와 $x=q$에서 극소이다. 다음 중 옳은 것은? (단, $p<q$)

① $a<p<b$이고 $c<q<d$

② $a<p<b$이고 $d<q<e$

③ $b<p<c$이고 $c<q<d$

④ $b<p<c$이고 $d<q<e$

⑤ $c<p<d$이고 $d<q<e$

풀이 18-

몇 가지 풀이법이 있을 수 있는데
증감법을 이용해서 그래프의 개형을 그리는 것이
가장 기본적이면서도 편리하기까지 합니다.

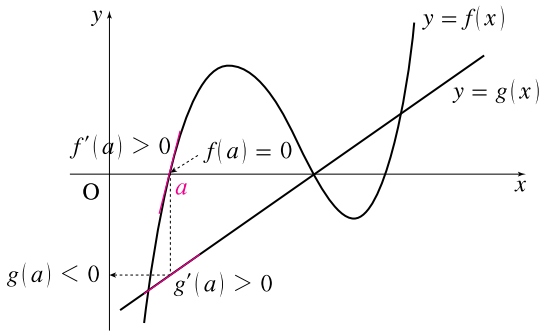
$$h(x)=f(x)g(x)$$

라고 합시다.

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

이므로 주어진 그래프를 이용해서 증감표를 만들 수 있습니다.

①

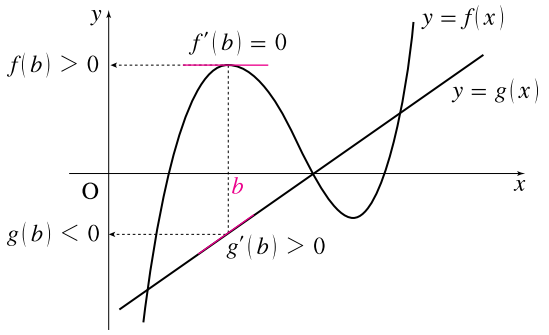


$$\begin{aligned}h'(a)&=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\\&=\oplus\cdot\ominus+0\cdot\oplus\\&=\ominus\end{aligned}$$

따라서

x	a	b	c	d	e
$h'(x)$	$-$				
$h(x)$	↘				

②



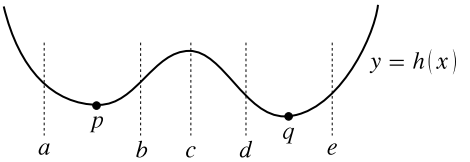
$$\begin{aligned}h'(b)&=f'(b)g(b)+f(b)g'(b)\\&=0\cdot\ominus+\oplus\cdot\oplus\\&=\oplus\end{aligned}$$

따라서

x	a	b	c	d	e
$h'(x)$	$-$	$+$			
$h(x)$	↘	↗			

③ 같은 방법으로 $x=c,\ d,\ e$일 때 $h'(x)$의 부호를 구하면

x	a	b	c	d	e
$h'(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$
$h(x)$	↘	↗	→	↘	↗



$y=h(x)$의 그래프의 개형이 그려집니다.
두 번의 극소를 갖는데

$$a<p<b,\quad d<q<e$$

이군요.

답 ②

[4점-17년모의평가 6월]

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 다음은 이차함수 $f(x)=x^2-7x+12$에 대하여 $f(a)f(b)=0$이 성립할 확률을 구하는 과정이다.

첫 번째 던져서 나오는 주사위의 눈의 수를 a라 할 때 $f(a)=0$이 되는 사건을 A라 하고, 두 번째 던져서 나오는 주사위의 눈의 수를 b라 할 때 $f(b)=0$이 되는 사건을 B라 하자.
이차방정식 $f(x)=0$의 해는 $x=3$ 또는 $x=4$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\boxed{\text{(가)}},\quad \mathrm{P}(B)=\boxed{\text{(가)}}$$

이다.
구하는 확률 $\mathrm{P}(A\cup B)$는

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

이고, 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\boxed{\text{(나)}}$$

이다. 그러므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 m, n, k라 할 때, $m\times n\times k$의 값은?

① $\frac{1}{81}$ ② $\frac{5}{243}$ ③ $\frac{7}{243}$ ④ $\frac{1}{27}$ ⑤ $\frac{11}{243}$

풀이 22-

1. (가)를 찾아라!

주사위를 던져서 3 또는 4가 나올 확률이므로

$$\frac{2}{6}=\boxed{\frac{1}{3}} \quad \cdots\rightarrow (가)$$

2. (나)를 찾아라!

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{9}} \quad \cdots\rightarrow (나)$$

3. (다)를 찾아라!

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}$$

$$=\boxed{\frac{5}{9}} \quad \cdots\rightarrow (다)$$

따라서

$$m\times n\times k=\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{243}$$

답 ②

풀이

[4점-17년모의평가 6월]

첫째항이 a인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+(-1)^n\times 2 & (n\text{이 }3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n+1 & (n\text{이 }3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15}=43$일 때, a의 값은?

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

풀이○7-

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+(-1)^n\times 2 & (n\text{이 }3\text{의 배수가 아닐 때 })\\ a_n+1 & (n\text{이 }3\text{의 배수일 때 })\end{cases}$$

$a_{15}=43$이란 걸 이용하라니까

a_{15}를 구해야 할 모양입니다. 자. 달려볼까요?

$$a_1=\boxed{a}$$

$n=1:\ a_2=a_1+(-1)^1\cdot 2=\boxed{a-2}$

$n=2:\ a_3=a_2+(-1)^2\cdot 2=(a-2)+2=\boxed{a}$

$n=3:\ a_4=a_3+1=\boxed{a+1}$

$n=4:\ a_5=a_4+(-1)^4\cdot 2=(a+1)+2=\boxed{a+3}$

$n=5:\ a_6=a_5+(-1)^5\cdot 2=(a+3)-2=\boxed{a+1}$

$n=6:\ a_7=a_6+1=(a+1)+1=\boxed{a+2}$

규칙 안 보이죠? 짜증 나요? 안 나요?

$n=7:\ a_8=a_7+(-1)^7\cdot 2=(a+2)-2=\boxed{a}$

$n=8:\ a_9=a_8+(-1)^8\cdot 2=\boxed{a+2}$

$n=9:\ a_{10}=a_9+1=(a+2)+1=\boxed{a+3}$

이왕 여기까지 온 거.. 몇 개 더 해서 a_{15}까지 구해버립시다.

열심히 계산해 보면..

$$a_{15}=a+4$$

$a_{15}=43$이므로

$$a+4=43$$

$$\therefore a=39$$

답 ⑤

※규칙이 있긴 있었어요.

$a_3=a$

$a_6=a+1$

$a_9=a+2$

이니까

$a_{12}=a+3$

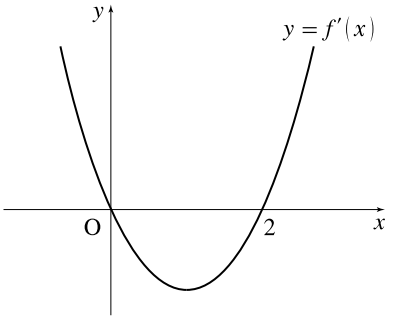
$a_{15}=a+4$

풀이

미적119-

[4점-17년모의평가 6월]

삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈 보 기 〉

ㄱ. $f(0)<0$이면 $|f(0)|<|f(2)|$이다.

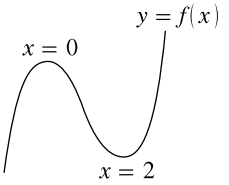
ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$이면 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다.

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 다른 실근의 개수는 4이다.

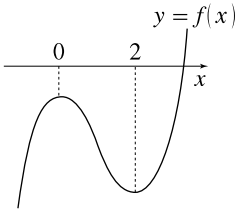
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이 19-

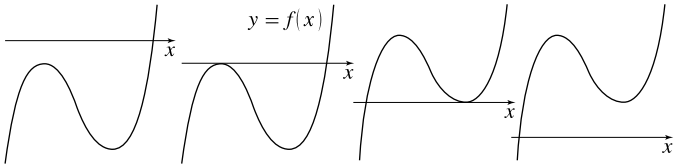
주어진 $y=f'(x)$의 그래프를 보면
$x=0,\ 2$에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지요.
따라서 $y=f(x)$는 $x=0,\ 2$에서 극점을
갖고 그래프의 개형은 오른쪽과 같습니다.



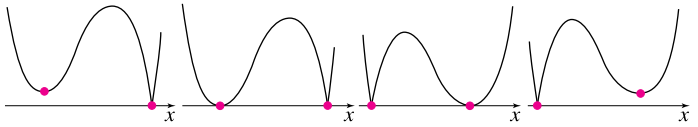
ㄱ. $f(0)<0$이면 $|f(0)|<|f(2)|$이다.
$f(0)<0$이면
x축이 오른쪽 같이 그려지게 되므로
$|f(0)|<|f(2)|$ (참!)



ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$이면 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a는 2개
$f(0)f(2)\geq 0$이란 말은.. $f(0)$과 $f(2)$의 부호가 같다는 소리죠. (음.. $f(0)$이나 $f(2)$가 0일 수도 있겠군요.)
생각할 수 있는 $f(x)$의 그래프의 개형은

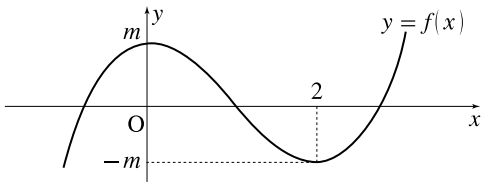


각각의 경우 $y=|f(x)|$의 개형은

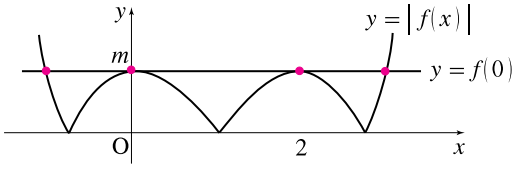


모든 경우에서 극솟값은 2개씩 나옵니다. (참!)

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근은 4개
$f(0)+f(2)=0$인 경우의 그래프 개형은



방정식 $|f(x)|=f(0)$을 그래프로 그리면



교점의 개수가 4개이므로 (참!)

답 ⑤

풀이

${}_4P_3$의 값을 구하시오.

풀이 16-

응?

$${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

답 24

풀이

미적115-

[3점-17년모의평가 6월]

함수 $f(x)=x^3-2x-2$에 대하여 $f'(3)$의 값을 구하시오.

풀이 15-

$f(x) = x^3 - 2x - 2$

$f'(x) = 3x^2 - 2$

$f'(3) = 3(3)^2 - 2$

$= 25$

답 25

풀이

[3점-17년모의평가 6월]

어느 학교 동아리 회원은 1학년이 6명, 2학년이 4명이다.
이 동아리에서 7명을 뽑을 때, 1학년에서 4명, 2학년에서 3명을 뽑는 경우의 수를 구하시오.

풀이 16-

1학년 6명 중에서 4명을 뽑고 : ${}_6C_4$

2학년 4명 중에서 3명을 뽑는다. : ${}_4C_3$

구하는 경우의 수는

$${}_6C_4 \times {}_4C_3 = 15 \times 4 = 60$$

답 60

풀이

[3점-17년모의평가 6월]

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여
$a_1 = 3$, $\frac{a_4 a_5}{a_2 a_3} = 16$일 때, a_6의 값을 구하시오.

풀이○5-

수열 $\{a_n\}$은 등비수열이니까

$$a_n = ar^{n-1}$$

$a_1 = 3$이고

$$\frac{a_4 a_5}{a_2 a_3} = 16$$

$$\frac{ar^3 \cdot ar^4}{ar \cdot ar^2} = 16$$

$$\frac{a^2 r^7}{a^2 r^3} = 16$$

$$r^4 = 16$$

$$r = 2 \quad (\because \text{모든 항이 양수이므로 } r > 0)$$

따라서

$$a_6 = ar^5$$

$$= 3(2)^5 = 96$$

답 96

풀이

[4점-17년모의평가 6월]

함수 $f(x)=\frac{2x-3}{x-5}$의 그래프의 점근선은 두 직선 $x=p$, $y=q$이다. 두 상수 p, q의 곱 pq의 값을 구하시오.

풀이○4-

$$y=\frac{2x-3}{x-5}$$

$$y=\frac{2(x-5)+7}{x-5}$$

$$y=2+\frac{7}{x-5}$$

$$y-2=\frac{7}{x-5}$$

이 유리함수는 $y=\frac{7}{x}$을

x축 방향으로 $+5$, y축 방향으로 $+2$만큼 평행이동한 함수입니다.

따라서 그 점근선은

$x=5, \quad y=2$

$\therefore pq=5\times 2=10$

답 10

풀이

[4점-17년모의평가 6월]

표와 같이 두 상자 A, B에는 흰 구슬과 검은 구슬이 섞여서 각각 100개씩 들어 있다.

(단위 : 개)

	상자 A	상자 B
흰 구슬	a	$100-2a$
검은 구슬	$100-a$	$2a$
합계	100	100

두 상자 A, B에서 각각 1개씩 임의로 꺼낸 구슬이 서로 같은 색일 때, 그 색이 흰색일 확률은 $\frac{2}{9}$이다. 자연수 a의 값을 구하시오.

풀이 21-

… 서로 같은 색일 때, … 흰색일 확률.

조건부확률이군요.

1. ① 두 상자 A, B에서 1개씩 꺼낸 구슬이 '흰색'일 확률

A에서 흰색 뽑고 B에서 흰색 뽑고

$$\frac{a}{100} \times \frac{100-2a}{100} = \frac{100a-2a^2}{10000}$$

② 두 상자 A, B에서 1개씩 꺼낸 구슬이 '검은색'일 확률

A에서 검은색 뽑고 B에서 검은색 뽑고

$$\frac{100-a}{100} \times \frac{2a}{100} = \frac{200a-2a^2}{10000}$$

따라서 A, B에서 1개씩 꺼낸 구슬이 '같은 색'일 확률은

$$\frac{100a-2a^2}{10000} + \frac{200a-2a^2}{10000} = \boxed{\frac{300a-4a^2}{10000}}$$

2. 조건부확률을 구합시다.

A, B에서 1개씩 꺼낸 구슬이 '같은 색'일 때, 그 색이 '흰색'일 확률

$$\mathrm{P}(\text{흰색} \mid \text{같은 색}) = \frac{2}{9}$$

$$\frac{\mathrm{P}(\text{흰색} \cap \text{같은 색})}{\mathrm{P}(\text{같은 색})} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{\frac{100a-2a^2}{10000}}{\frac{300a-4a^2}{10000}} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{100a-2a^2}{300a-4a^2} = \frac{2}{9}$$

$$9(100a-2a^2) = 2(300a-4a^2)$$

$$900a-18a^2 = 600a-8a^2$$

$$-10a^2 = -300a$$

$$a^2 = 30a$$

$$a = 30 \quad (\because a\text{는 자연수})$$

답 30

풀이

미적119-

[4점-17년모의평가 6월]

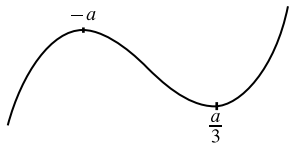
양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$가 닫힌 구간 $[-a,\ a]$에서 최댓값 M, 최솟값 $\frac{14}{27}$를 갖는다. $a+M$의 값을 구하시오.

풀이 19-

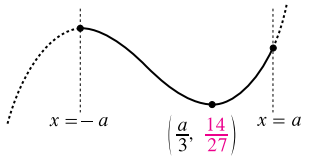
1. 최댓값, 최솟값 얘기가 나오니 그래프의 개형을 그려야겠네요.

$$f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x + 2$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - a^2$$
$$= (3x - a)(x + a)$$

$x = -a,\ \frac{a}{3}$에서 극점이 되겠군요.
따라서 그래프의 개형은, $a > 0$이라고 하니..



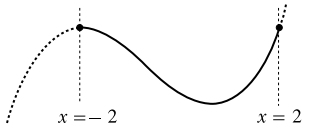
2. 닫힌 구간 $[-a,\ a]$에서 최솟값이 $\frac{14}{27}$라는 힌트를 줬습니다.



따라서

$$f\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{14}{27}$$
$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(\frac{a}{3}\right)^2 - a^2\left(\frac{a}{3}\right) + 2 = \frac{14}{27}$$
$$\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{a^3}{3} = \frac{14}{27} - 2$$
$$-\frac{5}{27}a^3 = -\frac{40}{27}$$
$$a^3 = 8$$
$$\boxed{a = 2}$$

그렇다면 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$이고



최댓값 M은 $f(-2)$나 $f(2)$ 중 큰 값이 되겠지요.

$$f(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 4(-2) + 2 = 10$$
$$f(2) = (2)^3 + 2(2)^2 - 4(2) + 2 = 10$$

잉? 똑같네.

$\therefore \boxed{M = 10}$

따라서

$$a + M = 2 + 10 = 12$$

답 12

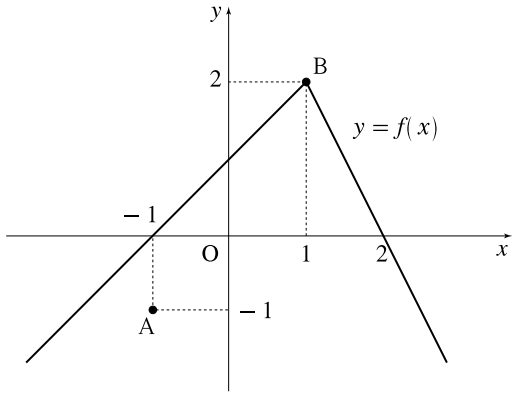
풀이

[4점-17년모의평가 6월]

함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ -2x+4 & (x\geq 1) \end{cases}$$

이고, 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1,-1)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$가 있다.
실수 x에 대하여 점 $(x,\ f(x))$에서 점 A까지의 거리의 제곱과 점 B까지의 거리의 제곱 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 하자.
함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합이 p일 때, $80p$의 값을 구하시오.



풀이 16-

1. $g(x)$가 뭔지 밝히는 게 우선이죠.
어렵다기 보다는.. 길고 지루하군요.

① $x<1$일 때 ($f(x)=x+1$일 때)

점 $(x,\ x+1)$에서

A$(-1,-1)$까지의 거리 제곱

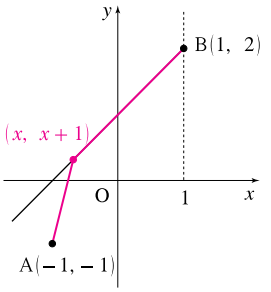
$(x+1)^2+\{(x+1)+1\}^2$

$=2x^2+6x+5$

B$(1,\ 2)$까지의 거리 제곱

$(x-1)^2+\{(x+1)-2\}^2$

$=2x^2-4x+2$



두 거리가 같아지는 때는

$2x^2+6x+5=2x^2-4x+2$

$10x=-3$

$x=-\frac{3}{10}$

두 거리의 제곱 중 크지 않은 값을 $g(x)$라고 한다니까

$$g(x)=\begin{cases}2x^2+6x+5 & \left(x<-\frac{3}{10}\right)\\ 2x^2-4x+2 & \left(-\frac{3}{10}\le x<1\right)\end{cases}\quad\cdots\rightarrow(\text{i})$$

② $x\ge 1$일 때 (즉, $f(x)=-2x+4$일 때)

점 $(x,-2x+4)$에서

A$(-1,-1)$까지의 거리 제곱

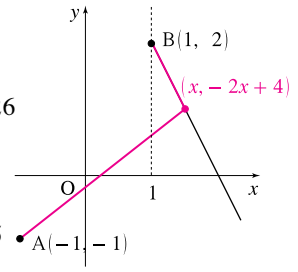
$(x+1)^2+\{(-2x+4)+1\}^2$

$=5x^2-18x+26$

B$(1,\ 2)$까지의 거리 제곱

$(x-1)^2+\{(-2x+4)-2\}^2$

$=5x^2-10x+5$



두 거리가 같아지는 때는

$5x^2-18x+26=5x^2-10x+5$

$x=\frac{21}{8}$

그렇다면

$$g(x)=\begin{cases}5x^2-10x+5 & \left(1\le x<\frac{21}{8}\right)\\ 5x^2-18x+26 & \left(x\ge\frac{21}{8}\right)\end{cases}\quad\cdots\rightarrow(\text{ii})$$

드디어 (i),(ii)에서 $g(x)$가 나왔습니다.

$$g(x)=\begin{cases}2x^2+6x+5 & \left(x<-\frac{3}{10}\right)\\ 2x^2-4x+2 & \left(-\frac{3}{10}\le x<1\right)\\ 5x^2-10x+5 & \left(1\le x<\frac{21}{8}\right)\\ 5x^2-18x+26 & \left(x\ge\frac{21}{8}\right)\end{cases}$$

2. 이 $g(x)$가 미분불가능한 점을 찾아봅시다.
가능성 있는 점은 $x=-\frac{3}{10},\ 1,\ \frac{21}{8}$일 때이죠.
일단 $x=-\frac{3}{10},\ 1,\ \frac{21}{8}$에서 연속인지 확인해보면
$g(x)$는 모든 실수에서 연속입니다. (계산은 생략.)
그렇다면 미분계수가 존재하지 않는 점에서 미분불가능이겠지요.

$$g'(x)=\begin{cases}4x+6 & \left(x<-\frac{3}{10}\right)\\ 4x-4 & \left(-\frac{3}{10}\le x<1\right)\\ 10x-10 & \left(1\le x<\frac{21}{8}\right)\\ 10x-18 & \left(x\ge\frac{21}{8}\right)\end{cases}$$

$\lim_{x\to-\frac{3}{10}-}(4x+6)\ne\lim_{x\to-\frac{3}{10}+}(4x-4)$이므로

$\boxed{x=-\frac{3}{10}}$에서 미분불가능

$\lim_{x\to1-}(4x-4)=\lim_{x\to1+}(10x-10)$이므로

$x=1$에서 미분가능

$\lim_{x\to\frac{21}{8}-}(10x-10)\ne\lim_{x\to\frac{21}{8}+}(10x-18)$이므로

$\boxed{x=\frac{21}{8}}$에서 미분불가능

따라서

$p=-\frac{3}{10}+\frac{21}{8}=\frac{186}{80}$

$80p=186$

답 186

[4점-17년모의평가 6월]

다음 조건을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

$\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$은 같은 자연수이고
$0 < b-a \le \frac{n}{2}$인 두 실수 a, b가 존재한다.

풀이 11-

1. 주어진 조건을 봅시다.

조건 1 : $\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)=k$ (k는 자연수)

$(na-a^2)=\quad (nb-b^2)=2^k$ ⋯➝(i)

음.. $na-a^2=nb-b^2$이라니.. $a=b$인 건가?

조건 2 : $0<b-a\le\frac{n}{2}$인 두 실수 a, b가 존재

$0<b-a$이니까 $a\neq b$이군요. 즉,

a, b가 '서로 다른 두 실수'란 말입니다.

그렇다면 (i)의 의미는

'a, b는 방정식 $nx-x^2=2^k$의 서로 다른 두 실근'

이라고 할 수 있겠군요.

2. 이에 따라 조건을 바꿔 써보면

> $-x^2+nx=2^k$의 서로 다른 두 실근을 a, b라 할 때
> $0<b-a\le\frac{n}{2}$ (k, n은 자연수)

근과 계수의 관계에 의하면 두 근 a, b의 합은

$$a+b=-\frac{n}{-1}=n$$

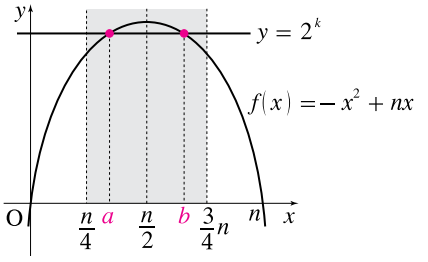
이지요. 이걸 두 번째 조건에 대입합시다.

$$\begin{array}{l|l}
0<\quad b\quad -a\le\frac{n}{2} & 0<b-\quad a\quad \le\frac{n}{2}\\
0<(n-a)-a\le\frac{n}{2} & 0<b-(n-b)\le\frac{n}{2}\\
0<\quad n-2a\quad \le\frac{n}{2} & 0<\quad -n+2b\quad \le\frac{n}{2}\\
-n<\quad -2a\quad \le-\frac{n}{2} & n<\quad 2b\quad \le\frac{3}{2}n\\
\frac{n}{2}>\quad a\quad \ge\frac{n}{4} & \frac{n}{2}<\quad b\quad \le\frac{3}{4}n\\
\frac{n}{4}\le\quad a\quad <\frac{n}{2} &
\end{array}$$

3. 다시 조건을 바꿔쓰면

> $-x^2+nx=2^k$의 서로 다른 두 실근을 a, b라 할 때
> $\frac{n}{4}\le a<\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}<b\le\frac{3}{4}n$ (k, n은 자연수)

이 조건에 어울리는 그래프를 그려볼까요?

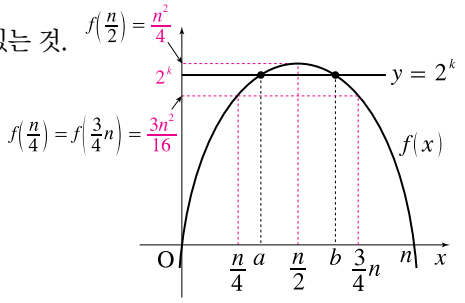


이 그래프에서 알 수 있는 것.

$f\left(\frac{n}{4}\right)\le 2^k<f\left(\frac{n}{2}\right)$

$\frac{3}{16}n^2\le 2^k<\frac{1}{4}n^2$

$\boxed{3n^2\le 16\cdot 2^k<4n^2}$



이 부등식을 만족하는 20 이하의 자연수 n을 구하면 되는 거죠.

4. $k=1$일 때 : $3n^2\le 16\cdot 2^1<4n^2$

$3n^2\le\ 32\ <4n^2$ 부등식 만족하는 $n=3$

$k=2$일 때 : $3n^2\le 16\cdot 2^2<4n^2$

$3n^2\le\ 64\ <4n^2$ 부등식 만족하는 n은 없음.

$k=3$일 때 : $3n^2\le 16\cdot 2^3<4n^2$

$3n^2\le\ 128\ <4n^2$ 부등식 만족하는 $n=6$

$k=4$일 때 : $3n^2\le 16\cdot 2^4<4n^2$

$3n^2\le\ 256\ <4n^2$ 부등식 만족하는 $n=9$

$k=5$일 때 : $3n^2\le 16\cdot 2^5<4n^2$

$3n^2\le\ 512\ <4n^2$ 부등식 만족하는 $n=12, 13$

$k=6$일 때 : $3n^2\le 16\cdot 2^6<4n^2$

$3n^2\le\ 1024\ <4n^2$ 부등식 만족하는 $n=17, 18$

어우.. 짜증나. 계산기 없이 하려면 힘들어요.

따라서 20 이하 자연수 n의 합은

$$3+6+9+12+13+17+18=78$$

답 78

[3점-17년모의평가 9월]

$\log_3 6 - \log_3 2$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 11-

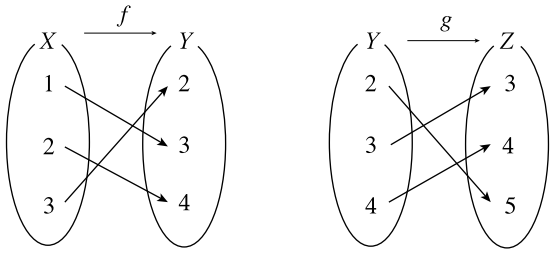
$\log_3 6 - \log_3 2 = \log_3 \frac{6}{2} = \log_3 3 = 1$

답 ①

풀이

[3점-17년모의평가 9월]

그림은 두 함수 $f : X \to Y,\quad g : Y \to Z$를 나타낸 것이다.



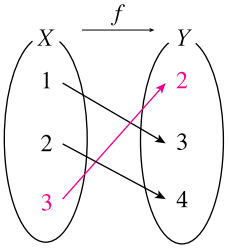
$(g \circ f)(3)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

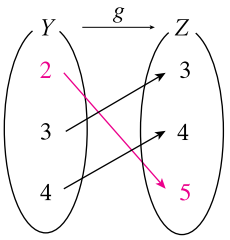
풀이 ○3−

$(g \circ f)(3)$

$= g(f(3))$



$= g(2)$



$= 5$

답 ⑤

풀이

[3점-17년모의평가 9월]

첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_7}{a_5} = 4$$

일 때, a_4의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

풀이○5-

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째 항 $a = 1$, 공비 $r > 0$

$$\frac{a_7}{a_5} = 4$$

$$\frac{ar^6}{ar^4} = 4$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2$$

따라서

$$a_4 = ar^3 = 1 \cdot 2^3 = 8$$

답 ②

풀이

[3점-17년모의평가 9월]

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{7}{9},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{9}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{7}{18}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

풀이 22-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$P(A) + P(B) = \frac{7}{9}$이고 $P(A \cap B) = \frac{2}{9}$이므로

$$P(A \cup B) = \frac{7}{9} - \frac{2}{9}$$

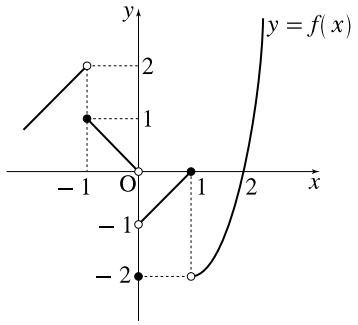
$$= \frac{5}{9}$$

답 ⑤

풀이

[3점-17년모의평가 9월]

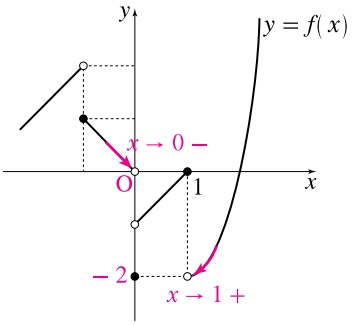
함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

풀이 11-



$$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$$

$= \quad 0 \quad + (-2)$

$= -2$

답 ①

풀이

[3점-17년모의평가 9월]

수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{7} a_k = \sum_{k=1}^{6} (a_k + 1)$$

을 만족시킬 때, a_7의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

풀이○6-

$$\sum_{k=1}^{7} a_k = \sum_{k=1}^{6} (a_k + 1)$$

수열 $\{a_n\}$이 뭔지 모르니 Σ를 직접 계산할 순 없고..

Σ가 뭔지 모를 땐, 다 풀어서 쓰는 게 방법.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$$
$$= (a_1 + 1) + (a_2 + 1) + (a_3 + 1) + (a_4 + 1) + (a_5 + 1) + (a_6 + 1)$$

$$\cancel{a_1} + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \cancel{a_4} + \cancel{a_5} + \cancel{a_6} + a_7$$
$$= \cancel{a_1} + 1 + \cancel{a_2} + 1 + \cancel{a_3} + 1 + \cancel{a_4} + 1 + \cancel{a_5} + 1 + \cancel{a_6} + 1$$

$\therefore a^7 = 6$

답 ①

※ 이렇게 풀 수도..

$$\sum_{k=1}^{7} a_k = \sum_{k=1}^{6} (a_k + 1)$$

$$\cancel{\sum_{k=1}^{6} a_k} + a_7 = \cancel{\sum_{k=1}^{6} a_k} + \sum_{k=1}^{6} 1$$

$$a_7 = 6$$

풀이

미적111-

[3점-17년모의평가 9월]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)f(x)}{x-2}=12$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 11-

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)f(x)}{x-2}=12$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)f(x)}{\cancel{x-2}}=12$$

$$\lim_{x\to 2}(x+2)f(x)=12$$

$$4\lim_{x\to 2}f(x)=12$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=3$$

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이라고 했으니 $x=2$에서도 연속이겠죠. 그렇다면

$$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)$$

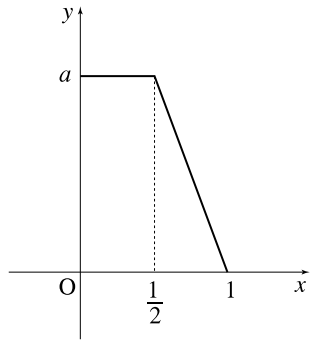
$$f(2)=3$$

답 ③

풀이

[3점-17년모의평가 9월]

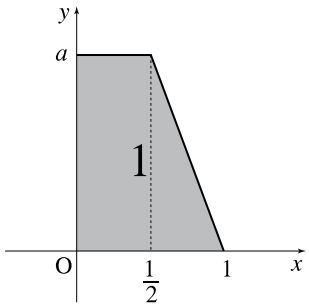
연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 1$이고,
X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.



상수 a의 값은?

① $\frac{10}{9}$ ② $\frac{11}{9}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{13}{9}$ ⑤ $\frac{14}{9}$

풀이 27-



전체 넓이 = 1이라는 것만 알면 되요.

$$\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot a=1$$

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{4}=1$$

$$\frac{3}{4}a=1$$

$$a=\frac{4}{3}$$

답 ③

풀이

정수 x에 대한 조건

$$p : x(x-11) \geq 0$$

에 대하여 조건 $\sim p$의 진리집합의 원소의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

풀이○2-

조건 $p : x(x-11) \geq 0$

조건 $\sim p : x(x-11) < 0$

조건 $\sim p$를 '참인 명제'로 만드는 x의 집합을 진리집합이라 하죠.

$$x(x-11) < 0$$

$$0 < x < 11$$

x는 정수이므로

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$

이 진리집합의 원소의 개수는 10개

답 ⑤

풀이

[3점-17년모의평가 9월]

어느 학급 학생 20명을 대상으로 과목 A와 과목 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 과목 A와 과목 B 중 하나를 선택하였고, 각 학생이 선택한 과목별 인원수는 다음과 같다.

(단위: 명)

구분	과목 A	과목 B	합계
남학생	3	7	10
여학생	5	5	10
합계	8	12	20

이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 남학생일 때, 이 학생이 과목 B를 선택한 학생일 확률은?

① $\frac{13}{20}$ ② $\frac{7}{10}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{17}{20}$

풀이 21-

'… 일 때, … 일 확률'이므로 조건부확률입니다.

선택한 학생이 남학생일 때, 이 학생이 B를 선택한 학생일 확률은

$$\mathrm{P}(B\text{선택} \mid \text{남학생}) = \frac{n(\text{남학생} \cap B)}{n(\text{남학생})} = \frac{7}{10}$$

답 ②

풀이

[4점-17년모의평가 9월]

첫째항이 4이고 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$

의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 ○6-

첫째항이 4, 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$은

$$a_n = 4 + (n-1)\cdot 1$$
$$= n + 3$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}}$$
$$= \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{k+4} + \sqrt{k+3}}$$

분모에 $\sqrt{\ }$ 가 있으니 유리화부터 합시다.

$$= \sum_{k=1}^{12} \frac{\sqrt{k+4} - \sqrt{k+3}}{(k+4)-(k+3)}$$
$$= \sum_{k=1}^{12} (\sqrt{k+4} - \sqrt{k+3})$$

풀어쓰면 줄줄이 지워지게 생겼군요.

$$= (\cancel{\sqrt{5}} - \sqrt{4}) + (\cancel{\sqrt{6}} - \cancel{\sqrt{5}}) + (\cancel{\sqrt{7}} - \cancel{\sqrt{6}}) + \cdots$$
$$\cdots + (\cancel{\sqrt{15}} - \cancel{\sqrt{14}}) + (\sqrt{16} - \cancel{\sqrt{15}})$$
$$= -\sqrt{4} + \sqrt{16}$$
$$= -2 + 4$$
$$= 2$$

답 ②

풀이

[4점-17년모의평가 9월]

어느 공항에서 처리되는 각 수하물의 무게는 평균이 18kg, 표준편차가 2kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공항에서 처리되는 수하물 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 이 수하물의 무게가 16kg 이상이고 22kg 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.7745
④ 0.8185 ⑤ 0.9104

풀이 28-

평범함 정규분포문제.

수하물의 무게를 X라 하면

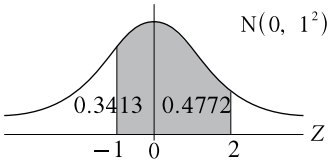
확률변수 X는 정규분포 $N(18,\ 2^2)$을 따릅니다.

구하는 확률은

$$P(16 \le X \le 22)$$

$$= P\left(\frac{16-18}{2} \le Z \le \frac{22-18}{2}\right)$$

$$= P(-1 \le Z \le 2)$$



$$= 0.3413 + 0.4772$$

$$= 0.8185$$

답 ④

풀이

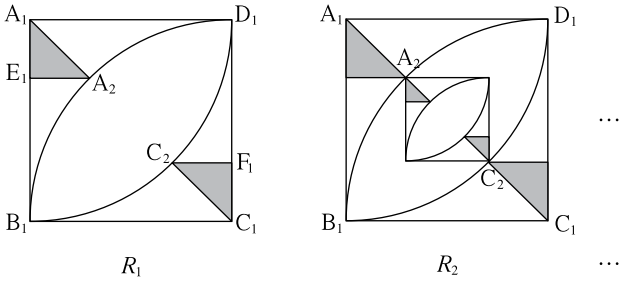
미적106-

[4점-17년모의평가 9월]

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 안에 꼭짓점 A_1, C_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1, C_1D_1을 반지름으로 하는 사분원을 각각 그린다. 선분 A_1C_1이 두 사분원과 만나는 점 중 점 A_1과 가까운 점을 A_2, 점 C_1과 가까운 점을 C_2라 하자. 선분 A_1D_1에 평행하고 점 A_2를 지나는 직선이 선분 A_1B_1과 만나는 점을 E_1, 선분 B_1C_1에 평행하고 점 C_2를 지나는 직선이 선분 C_1D_1과 만나는 점을 F_1이라 하자. 삼각형 $A_1E_1A_2$와 삼각형 $C_1F_1C_2$를 그린 후 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 A_2C_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 개의 사분원과 두 개의 삼각형을 그리고 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



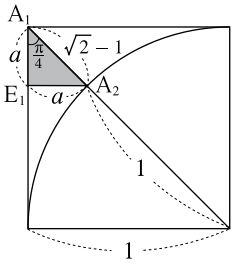
① $\frac{1}{12}(\sqrt{2}-1)$ ② $\frac{1}{6}(\sqrt{2}-1)$ ③ $\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$

④ $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$ ⑤ $\frac{5}{12}(\sqrt{2}-1)$

풀이○6-

1. $R_1 \to R_2$로 가면서 기존 도형에 닮은꼴 새 도형을 추가했으니 R_n의 넓이 S_n은 '수열의 합'일테죠.

① S_1 : R_1의 넓이



직각이등변삼각형 $A_1E_1A_2$에서

$$a : (\sqrt{2}-1) = 1 : \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}\,a = \sqrt{2} - 1$$

$$a = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

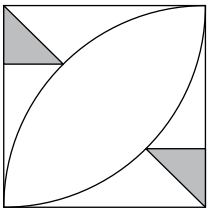
그렇다면

$$S_1 = 2 \times \triangle A_1E_1A_2$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2}a^2\right)$$

$$= \cancel{2} \times \left(\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{3-2\sqrt{2}}{2}}$$



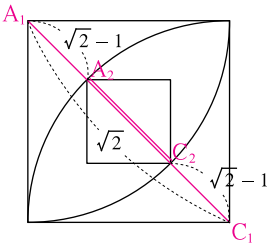
② S_2 : R_2의 넓이

그냥 $\overline{A_1C_1}$과 $\overline{A_2C_2}$의 길이비를 구해버리죠.

$\overline{A_1C_1} = \sqrt{2}$ 이고

$\overline{A_2C_2} = \sqrt{2} - 2(\sqrt{2}-1)$

$= 2 - \sqrt{2}$ 이므로



닮음비는 $\sqrt{2} : 2-\sqrt{2}$

넓이비는 $(\sqrt{2})^2 : (2-\sqrt{2})^2$

$= 2 : 6-4\sqrt{2}$

$= 1 : 3-2\sqrt{2}$

따라서 추가되는 도형의 넓이는 S_1의 $3-2\sqrt{2}$ 배이므로

$$S_2 = \boxed{S_1 + (3-2\sqrt{2})S_1}$$

즉, S_n은 공비 $3-2\sqrt{2}$ 인 등비수열의 합이 되겠지요.

2. $$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-(3-2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\frac{3-2\sqrt{2}}{2}}{-2+2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$$

답 ③

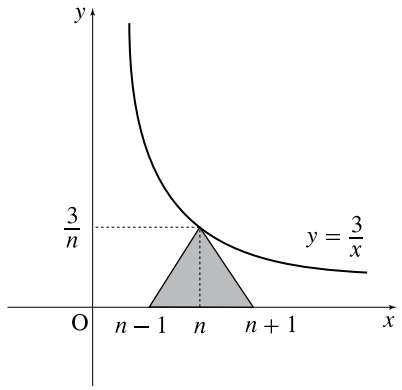
풀이

수206-

[4점-17년모의평가 9월]

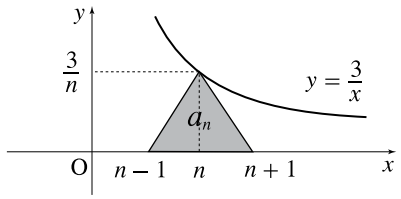
자연수 n에 대하여 곡선 $y=\frac{3}{x}\ (x>0)$ 위의 점 $\left(n,\ \frac{3}{n}\right)$과 두 점 $(n-1,\ 0),\ (n+1,\ 0)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{9}{a_n a_{n+1}}$의 값은?

① 410 ② 420 ③ 430 ④ 440 ⑤ 450



풀이 06-

삼각형의 넓이 a_n이 너무 쉽게 나와버립니다.



$$a_n = \frac{1}{2}\{(n+1)-(n-1)\}\frac{3}{n}$$

$$= \frac{1}{2}(2)\frac{3}{n}$$

$$= \frac{3}{n}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{9}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{10}\frac{9}{\frac{3}{n}\cdot\frac{3}{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{10}\frac{\cancel{9}n(n+1)}{\cancel{9}}$$

$$= \sum_{n=1}^{10}(n^2+n)$$

$$= \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} + \frac{10\cdot 11}{2}$$

$$= 385 + 55$$

$$= 440$$

답 ④

풀이

[4점-17년모의평가 9월]

1부터 n까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 서로 다른 4장의 카드를 선택할 때, 선택한 카드 4장에 적힌 수 중 가장 큰 수를 확률변수 X라 하자. 다음은 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, $n \geq 4$)

자연수 $k\ (4 \leq k \leq n)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 1부터 $k-1$까지의 자연수가 적혀 있는 카드 중에서 서로 다른 3장의 카드와 k가 적혀 있는 카드를 선택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누는 것이므로

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{\boxed{\text{(가)}}}{{}_n\mathrm{C}_4}$$

이다. 자연수 $r\ (1 \leq r \leq k)$에 대하여

$${}_k\mathrm{C}_r=\frac{k}{r}\times{}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

이므로

$$k\times\boxed{\text{(가)}}=4\times\boxed{\text{(나)}}$$

이다. 그러므로

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=4}^{n}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$$

$$=\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_4}\sum_{k=4}^{n}\left(k\times\boxed{\text{(가)}}\right)$$

$$=\frac{4}{{}_n\mathrm{C}_4}\sum_{k=4}^{n}\boxed{\text{(나)}}$$

이다.

$$\sum_{k=4}^{n}\boxed{\text{(나)}}={}_{n+1}\mathrm{C}_5$$

이므로

$$\mathrm{E}(X)=(n+1)\times\boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $a\times f(6)\times g(5)$의 값은?

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

풀이 16-

1. (가)를 찾아라!

(가)에 들어갈 내용은 (가)의 바로 위에 씌어있지요.

'1부터 $k-1$까지 자연수가 적혀있는 카드 중에서
서로 다른 3장의 카드와 …'

$\therefore \boxed{{}_{k-1}C_3}$ ⋯➝ (가)

2. (나)를 찾아라!

$$k \times \boxed{\text{(가)}} = 4 \times \boxed{\text{(나)}}$$

$$k \times {}_{k-1}C_3 = 4 \times \boxed{\text{(나)}}$$

$$\frac{k}{4} \times {}_{k-1}C_3 = \boxed{\text{(나)}}$$

증명의 7번째 줄에서

$${}_kC_r = \frac{k}{r} \times {}_{k-1}C_{r-1}$$

이라고 했으니

$$\frac{k}{4} \times {}_{k-1}C_3 = \boxed{{}_kC_4} \quad \cdots\rightarrow (나)$$

3. (다)를 찾아라!

증명의 밑에서 6번째 줄

$$E(X) = \frac{4}{{}_nC_4} \sum_{k=4}^{n} {}_kC_4$$

증명의 밑에서 4번째 줄 이용하면

$$= \frac{4}{{}_nC_4} \times {}_{n+1}C_5$$

$$= \frac{4}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} \times \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= (n+1) \times \boxed{\frac{4}{5}} \quad \cdots\rightarrow (다)$$

4. 따라서

$$a \times f(6) \times g(5) = \frac{4}{5} \times {}_{6-1}C_3 \times {}_5C_4$$

$$= \frac{4}{5} \times 10 \times 5 = 40$$

답 ①

풀이

[4점-17년모의평가 9월]

각 자리의 수가 0이 아닌 네 자리의 자연수 중
각 자리의 수의 합이 7인 모든 자연수의 개수는?

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

풀이 17–

네 자리의 자연수

$$\boxed{a}\ \boxed{b}\ \boxed{c}\ \boxed{d}$$

가 있습니다.

$a,\ b,\ c,\ d$는 모두 0이 아니고요

$a+b+c+d=7$이어야 한답니다.

우선, 합이 7인 네 개의 자연수는

$$(1,\ 1,\ 1,\ 4)$$
$$(1,\ 1,\ 2,\ 3)$$
$$(1,\ 2,\ 2,\ 2)$$

이게 전부입니다. 예. 몇 가지 안 되요.

① $(1,\ 1,\ 1,\ 4)$를 나열하여 만드는 네 자리 자연수의 개수
같은 것이 있는 순열이군요.

$$\frac{4!}{3!}=4\ (\text{가지})$$

② $(1,\ 1,\ 2,\ 3)$을 나열하여 만드는 네 자리 자연수의 개수

$$\frac{4!}{2!}=12\ (\text{가지})$$

③ $(1,\ 2,\ 2,\ 2)$를 나열하여 만드는 네 자리 자연수의 개수

$$\frac{4!}{3!}=4\ (\text{가지})$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$4+12+4=20\ (\text{가지})$$

답 ④

풀이

미적119-

[4점-17년모의평가 9월]

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.
(나) $f'(-3)=f'(3)$

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이 19-

$f(x)$가 삼차함수이면 $f'(x)$는 이차함수겠죠.

그런데 (가)에서 $x=-2$에서 극댓값을 가진다고 하니

$$f'(x)=k(x+2)(x+a) \quad (k\neq 0)$$

그리고 (나)에선 $f'(-3)=f'(3)$이라고 하니까

$$k(-3+2)(-3+a)=k(3+2)(3+a)$$

$$-(-3+a)=5(3+a)$$

$$3-a=15+5a$$

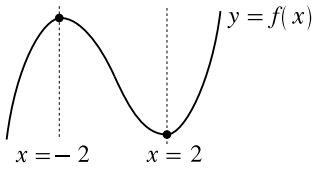
$$-6a=12$$

$$a=-2$$

$$\therefore f'(x)=k(x+2)(x-2) \quad (k\neq 0)$$

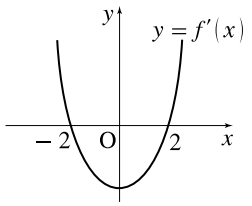
즉, $f(x)$는 $x=-2,\ 2$에서 극점을 갖는 삼차함수인데

그 중에 $x=-2$에서 극댓값이라 하니까.. $y=f(x)$의 개형은

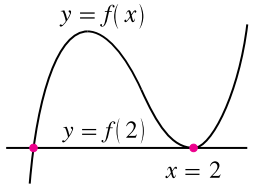


$$\therefore f'(x)=k(x+2)(x-2) \quad (k>0)$$

ㄱ. $f'(x)=k(x+2)(x-2) \quad (k>0)$의 개형은 오른쪽과 같으므로 $x=0$에서 최솟값을 가집니다. (참!)



ㄴ. $y=f(x)$의 그래프에 $y=f(2)$의 그래프를 겹쳐 그리면 서로 다른 두 점에서 만납니다. (참!)



ㄷ. $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 식을 구합시다.

$$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$$

$f'(x)=kx^2-4k$를 부정적분하면 $f(x)=\frac{k}{3}x^3-4kx+C$죠.

$$y-\left\{\frac{k}{3}(-1)^3-4k(-1)+C\right\}=\{k(-1)^2-4k\}(x+1)$$

$$y-\left(-\frac{k}{3}+4k+C\right)=(k-4k)(x+1)$$

$$y-\left(\frac{11}{3}k+C\right)=-3k(x+1)$$

$$y=-3kx-3k+\frac{11}{3}k+C$$

$$y=-3kx+\frac{2}{3}k+C$$

이 접선이 점 $(2,\ f(2))$를 지난다니.. 대입하면 성립하겠지요.

$$f(2)=-3k(2)+\frac{2}{3}k+C$$

$$\frac{k}{3}(2)^3-4k(2)+\cancel{C}=-6k+\frac{2}{3}k+\cancel{C}$$

$$\frac{8}{3}k-8k=-6k+\frac{2}{3}k$$

$$-\frac{16}{3}k=-\frac{16}{3}k$$

등식이 성립하죠? 점 $(2,\ f(2))$를 지나는 것 맞습니다. (참!)

답 ⑤

미적119-

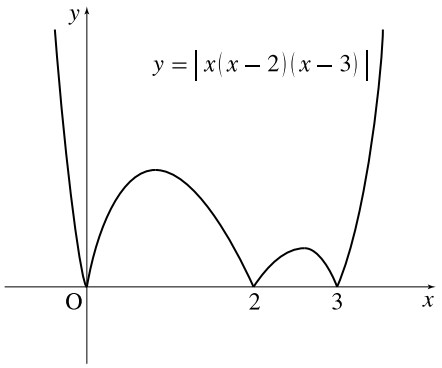
[4점-17년모의평가 9월]

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은?

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $0,\ 2,\ 3$뿐이다.

(나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

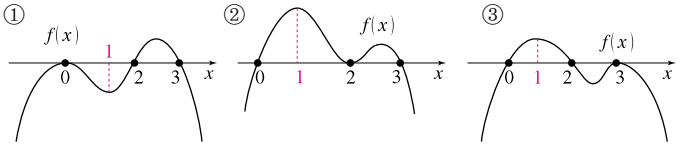


풀이 19-

1. $f(x)$는 최고차항의 계수가 음수이므로 M형 사차함수입니다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.

조건(가)를 만족시키는 사차함수 $f(x)$는 세 가지가 있지요.



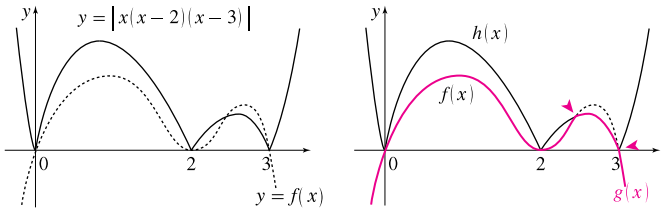
$f(x)=ax^2(x-2)(x-3)$ $f(x)=ax(x-2)^2(x-3)$ $f(x)=ax(x-2)(x-3)^2$

각각의 경우에 $f(1)$을 표시해봤더니 ①은 $f(1)<0$이고 ②,③은 $f(1)>0$이군요. 따라서 $f(1)$의 최댓값은 ②나 ③에서 나오겠죠.

2. ②와 ③을 가지고 조건(나)를 따져봅시다.

(나) $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, $g(x)$는 실수 전체에서 미분 가능.

먼저, 주어진 그래프와 ②를 겹쳐 그리고 생각해봅시다.



$h(x)=|x(x-2)(x-3)|$이라고 하고

$f(x)$와 $h(x)$ 중 아래를 지나는 걸 $g(x)$라 했을 때,

$f(x)$가 $h(x)$의 위로 올라가는 구간이 있으면

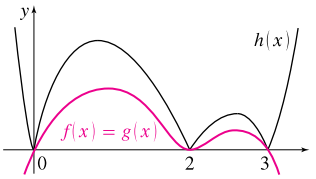
그 구간의 양 끝에서 $g(x)$는 '꺾어진 모양'이 되고, 미분 불가능이 됩니다.

그러므로 $g(x)$가 '실수 전체에서 미분가능'하려면

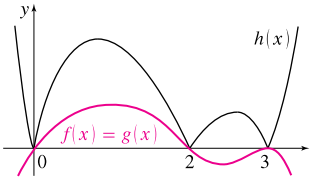
$f(x)$가 항상 $h(x)$의 아래를 지나가야 합니다.

(혹시 $f(x)$와 $h(x)$가 절묘하게 매끄럽게 교차하면 꺾어지는 점이 안 생길 수도 있지 않을까.. 하는 의문이 들 수 있는데.. 그런 경우는 없다고 칩시다.#좋게말해_직관#솔직히_주먹구구)

따라서 조건(나)를 만족시키는 그래프 ②는 오른쪽이 유일합니다. (ⅰ)⋯



마찬가지로 그래프 ③ 중 조건(나)를 만족시키는 개형은 오른쪽이 유일하고요. (ⅱ)⋯



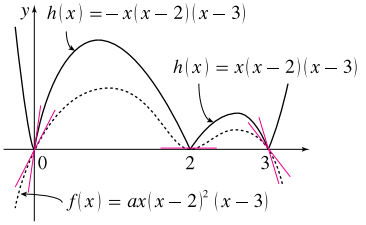
3. 두 그래프의 개형에서 $f(1)$의 최댓값을 각각 구해봅시다.

먼저 그래프 (ⅰ)에서 $f(1)$은

$$f(1)=a\cdot 1\cdot(1-2)^2(1-3)$$
$$=-2a$$

그런데 그래프들이 오른쪽처럼 그려지려면

$$\begin{cases} f'(0)\le h'(0) \\ f'(3)\ge h'(3) \end{cases} \cdots\text{(iii)}$$



이어야 합니다. (이런 생각을 어떻게 하느냐고요? 하고 싶어서 하는 게 아니죠. 딱히 다른 방법이 없어서 이렇게라도 하는 거죠.)

미분계수를 각각 계산하면 (iii)은 (복잡한 계산은 여러분이..)

$$\begin{cases} -12a\le 6 \\ 3a\ge -3 \end{cases}$$

이 연립부등식을 풀면

$$a\ge -\frac{1}{2}$$

a는 음수이므로

$$-\frac{1}{2}\le a<0$$

$$0<-2a\le 1$$

$$0<f(1)\le 1$$

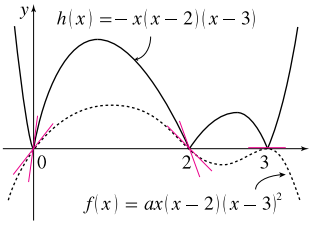
$\therefore f(1)$의 최댓값은 1 ⋯(iv)

그 다음, 그래프 (ⅱ)에서 같은 방법을 반복합니다.

$$f(1)=a\cdot 1\cdot(1-2)(1-3)^2$$
$$=-4a$$

$$\begin{cases} f'(0)\le h'(0) \\ f'(2)\ge h'(2) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -18a\le 6 \\ 2a\ge -2 \end{cases}$$



연립방정식을 풀면 $a\ge -\frac{1}{3}$

$$-\frac{1}{3}\le a<0$$

$$0<-4a\le \frac{4}{3}$$

$$0<f(1)\le \frac{4}{3}$$

$\therefore f(1)$의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ ⋯(v)

(iv), (v)에서 더 큰 값은 $\frac{4}{3}$

답 ②

미적125-

[3점-17년모의평가 9월]

$\int_0^3 (x^2 - 4x + 11)dx$의 값을 구하시오.

풀이 25-

$$\int_0^3 (x^2 - 4x + 11)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 11x\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{3}(27 - 0) - 2(9 - 0) + 11(3 - 0)$$

$$= 9 \quad - 18 \quad + 33$$

$$= 24$$

답 24

풀이

[3점-17년모의평가 9월]

함수 $f(x)=2x-13$에 대하여 $f^{-1}(7)$의 값을 구하시오.

풀이○3–

$f^{-1}(7)=k$라고 하면

$7=f(k)$

$7=2k-13$

$20=2k$

$k=10$

답 10

풀이

미적116-

[3점-17년모의평가 9월]

함수

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & (x<1) \\ x^4+a & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

풀이 16-

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & (x<1) \\ x^4+a & (x\geq 1) \end{cases}$$

$x=1$에서 미분가능하면

① $x=1$에서 함수값 같고

$$a(1)^2+1=(1)^4+a$$

$$a+1=a+1$$

음.. 하나마나한..

② $x=1$에서 미분계수도 같습니다.

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax & (x<1) \\ 4x^3 & (x\geq 1) \end{cases}$$

$$2a(1)=4(1)^3$$

$$2a=4$$

$$a=2$$

답 ②

풀이

[4점-17년모의평가 9월]

흰 공 2개, 빨간 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다.
이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때,
꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 확률이 $\frac{q}{p}$이다.
$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

풀이 20-

6개의 공 중에서 2개를 꺼내는 모든 방법의 수는

$${}_6C_2 = 15$$

흰 공 2개 중에서 2개를 꺼내는 방법의 수는

$${}_2C_2 = 1$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{15}$$

$\therefore p + q = 15 + 1 = 16$

답 16

풀이

[4점-17년모의평가 9월]

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 두 부분집합 $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5\}$에 대하여

$$X\cup A=X,\quad X\cap B^{C}=X$$

를 만족시키는 U의 모든 부분집합 X의 개수를 구하시오.

풀이○1-

주어진 조건에 의하면 집합 X는..

$X \cup A = X$ ⋯› $A = \{1,\ 2\}$의 원소를 이미 모두 가지고 있다.

$X \cap B^C = X$ ⋯› $B^C = \{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 부분집합이다.

즉, 집합 X는

원소 1, 2를 반드시 포함하고, 집합 $\{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 부분집합 입니다.

따라서 집합 X의 개수는

6을 포함하거나 말거나, 7을 포함하거나 말거나, 8을 포함하거나 말거나 해야 하니까

$2 \times 2 \times 2 = 8$ (개)

답 8

풀이

미적126-

[4점-17년모의평가 9월]

함수 $f(x)=4x^2+6x+32$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

의 값을 구하시오.

풀이 26-

$f(x)=4x^2+6x+32$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Rightarrow\int_0^1,\qquad\frac{k}{n}\Rightarrow x,\qquad\frac{1}{n}\Rightarrow dx$$

$$=\int_0^1 x\,f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 x(4x^2+6x+32)dx$$

$$=\int_0^1 (4x^3+6x^2+32x)dx$$

$$=\left[x^4+2x^3+16x^2\right]_0^1$$

$$=1+2+16$$

$$=19$$

답 19

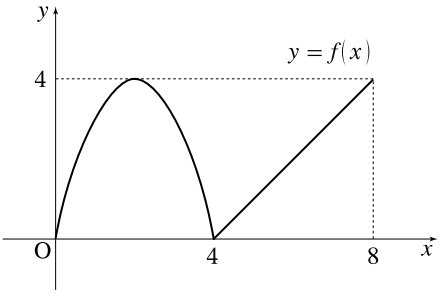
풀이

[4점-17년모의평가 9월]

구간 $[0,\ 8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-x(x-4) & (0\le x<4)\\ x-4 & (4\le x\le 8)\end{cases}$$

이다. 실수 $a\ (0\le a\le 4)$에 대하여 $\int_a^{a+4} f(x)dx$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

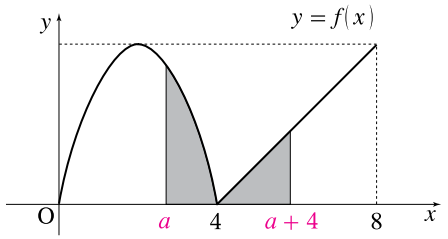


풀이 25-

1. $\int_a^{a+4} f(x)dx$의 최솟값을 구하는 문제인데요. 생긴 것보다는 단순하게 풀립니다.

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x & (0\le x<4)\\ x-4 & (4\le x\le 8)\end{cases}$$

$\int_a^{a+4} f(x)dx$는 적분구간의 크기가 4라는 뜻이죠. 아래처럼요.



이 정적분은 두 구간으로 나눠서 계산하면 됩니다.

$$\int_a^{a+4} f(x)dx=\int_a^{4} f(x)dx+\int_4^{a+4} f(x)dx$$

$$=\int_a^{4}(-x^2+4x)dx+\int_4^{a+4}(x-4)dx$$

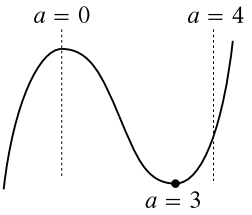
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_a^4+\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^{a+4}$$

우다다다 계산하면

$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$$

2. 이 함수의 최솟값을 구해야 합니다.

$g(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$라고 하면



$$g'(a)=a^2-3a$$
$$=a(a-3)$$

문제에서 $0\le a\le 4$라고 했으니까

$a=3$에서 $g(a)$는 최솟값이 되네요.

$$g(3)=\frac{1}{3}(3)^3-\frac{3}{2}(3)^2+\frac{32}{3}$$
$$=\frac{37}{6}$$

$$p+q=6+37=43$$

답 43

풀이

[4점-17년모의평가 9월]

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역

$$\left\{(x,\ y)\left|\ 0 \le x \le n,\quad 0 \le y \le \frac{\sqrt{x+3}}{2}\right.\right\}$$

에 포함되는 정사각형 중에서 다음 조건을 만족시키는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$이라 하자.

(가) 각 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 정수이다.

(나) 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 이하이다.

예를 들어 $f(14)=15$이다. $f(n) \le 400$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 구하시오.

1. $f(n)$은

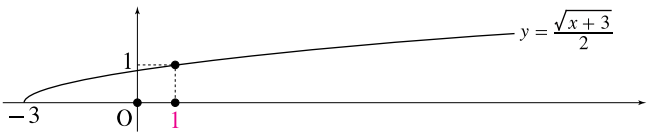
영역 $0 \le x \le n,\ 0 \le y \le \frac{\sqrt{x+3}}{2}$ 안의 점 (정수, 정수)를 꼭짓점으로 하는 정사각형의 개수

입니다.

예. 당연히 무슨 소린지 모르겠습니다.

$n=1,\ 2,\ 3$을 대입하면 뭐 좀 나아질까.. 하고 시도해 봅니다.

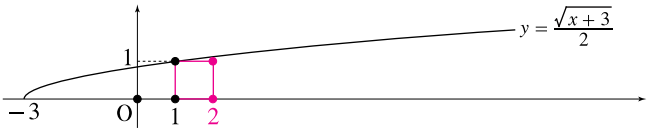
① $n=1$이면



색칠된 영역 안에 x, y좌표가 정수인 점은 3개뿐이니..

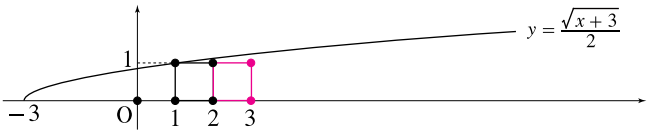
정사각형을 만들 수 없지요. 따라서 $\boxed{f(1)=0}$

② $n=2$이면



색칠된 영역 안에 정사각형은 1개 그려집니다. $\therefore \boxed{f(2)=1}$

③ $n=3$이면



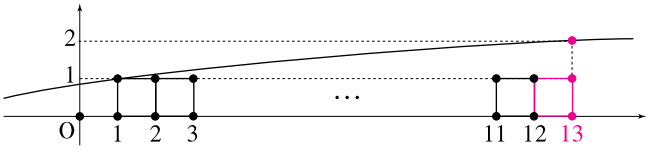
$\therefore \boxed{f(3)=2}$

응? 정사각형이 하나씩 늘어나니까.. $f(n)=n-1$인 건가?

그럴리가요. 이 문제는 '믿고 거르는 30번' 문제인걸요.

조금 더 생각해보면 변화가 일어나는 순간을 추측할 수 있지요.

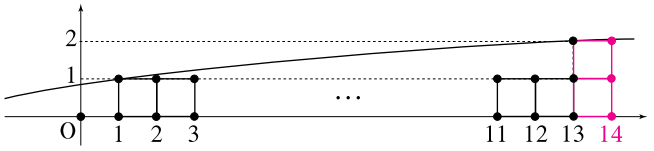
④ $\frac{\sqrt{x+3}}{2}=2$일 때, 즉, $x=13$일 때



음.. 아직까진 정사각형이 하나 늘어날 뿐이지만..

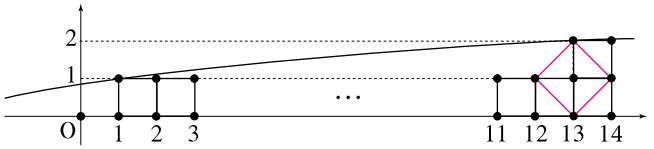
$\boxed{f(13)=12}$

⑤ $n=14$이면



올ㅋ. 정사각형이 2개 늘어났다. $f(14)=14$

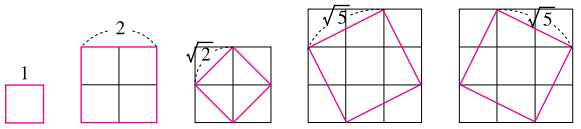
응? 그런데 문제에서 $\boxed{f(14)=15}$라네요? 뭐가 빠졌지?



헐.. 정사각형을 삐딱하게 그릴 수도 있구나.. (털썩..)

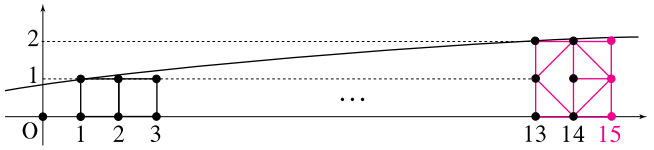
2. 삐딱한 정사각형까지 있다면..

한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 이하인 정사각형을 모두 그려봅시다.



(으어!!!! 느낌 안 좋아. 우리 이 문제는 그냥 제끼는 걸로..)

⑥ $n=15$이면



작은 거 2개, 큰 거 1개, 삐딱한 거 1개, 총 4개 증가.

$\therefore f(15)=f(14)+4=19$

$n=16,\ 17,\ 18,\ \cdots$ 계속해서 정사각형은 4개씩 증가하다가..

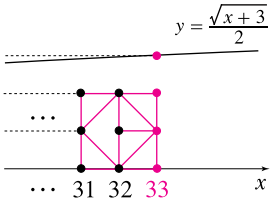
⑦ $\dfrac{\sqrt{x+3}}{2}=3$일 때, 즉, $x=33$일 때

이때까지는 4개 증가에 그치지만

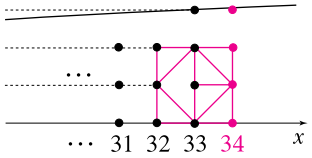
$f(33)=f(14)+(33-14)\cdot 4$

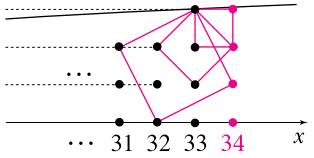
$=15+76$

$=91$



⑧ $n=34$일 때

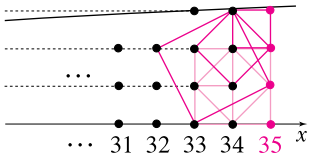


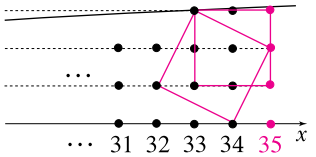


$f(34)=f(33)+(4+3)$

$=91+7=98$

⑨ $n=35$일 때





$f(35)=f(34)+(7+2)$

$=98+9=107$

9개씩 늘어나지요?

$\dfrac{\sqrt{x+3}}{2}=4$일 때, 즉, $x=61$일 때까지 9개씩 늘어나다가

$f(61)=f(35)+(61-35)\cdot 9$

$=107+234=341$

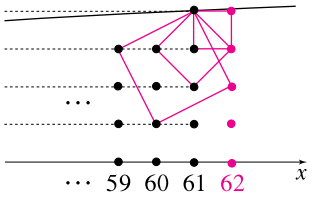
⑩ $n=62$일 때

9개씩 늘어나던 정사각형 이외에

3개가 추가로 생깁니다.

$f(62)=g(61)+(9+3)$

$=341+12=353$



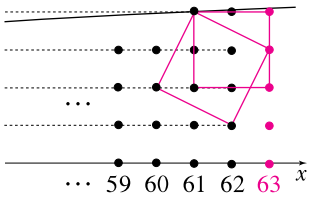
⑪ $n=63$일 때

12개의 정사각형 이외에

2개가 더 생기고요.

$f(63)=f(62)+(12+2)$

$=353+14=367$



⑫ $n=64,\ 65,\ \cdots$ 일 때, 당분간 정사각형은 14개씩 늘어날테니

$f(64)=367+14=381$

$f(65)=381+14=395$

$f(66)=395+14=409$

따라서 $f(n)\le 400$을 만족시키는 n의 최댓값은 65

답 65

※ 기출문제집의 풀이가 의미 없어요. 결국 일일이 다 찾아서 더해야 풀리는 문제.

※ n을 이용한 일반항을 구해서 풀기도 하던데.. 정녕 시험장에서 그것이 가능하다고 생각하시옵니까?

※ 암튼 결론은 이 문제때문에 평가원이 욕 많이 먹었다는 거.

수201-

[3점-17년 수능]

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{8}, \quad \mathrm{P}(A \cap B^C) = \frac{3}{16}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.)

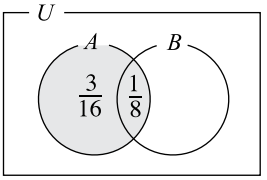
① $\frac{3}{16}$ ② $\frac{7}{32}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{9}{32}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

풀이○1-

생긴 건 확률문제인데 풀다보니 집합문제.

$$P(A\cap B)=\frac{1}{8},\quad P(A\cap B^C)=\frac{3}{16}$$

밴 다이어그램에 표시하면



따라서

$$P(A)=\frac{3}{16}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$$

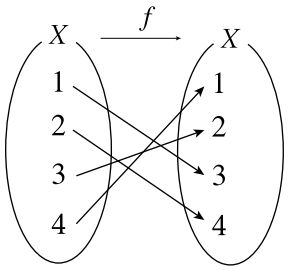
답 ⑤

풀이

수2O3-

[3점-17년 수능]

그림은 함수 $f : X \to X$를 나타낸 것이다.



$f(2)+f^{-1}(2)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

풀이○3−

주어진 그림에서

$f(2)=4$

$f^{-1}(2)=k$라 하면

$2=f(k)$

$\therefore k=3$

따라서

$f(2)+f^{-1}(2)$

$=4+3=7$

답 ⑤

풀이

수202-

[3점-17년 수능]

실수 x에 대한 두 조건

$$p : |x-1| \le 3$$
$$q : |x| \le a$$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 a의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이○2-

1. 조건이 나오면 항상 진리집합이 따라옵니다.

> 진리집합
> '조건'을 '참인 명제'가 되도록 하는 값들로 이루어진 집합

조건 p의 진리집합 P는

$$p : |x-1| \le 3$$
$$-3 \le x-1 \le 3$$
$$-2 \le x \le 4$$
$$\therefore \mathrm{P} = \{x \mid -2 \le x \le 4\}$$

조건 q의 진리집합 Q는

$$q : |x| \le a$$
$$-a \le x \le a \quad (\because a > 0)$$
$$\therefore \mathrm{Q} = \{x \mid -a \le x \le a\}$$

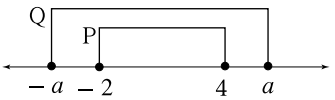
2. 'p가 q이기 위한 충분조건'

p가 충분조건이 되어야 한단 말이죠.

$$p \Longrightarrow q$$

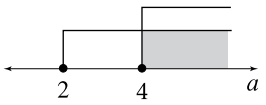
진리집합의 포함관계는

$$\mathrm{P} \subset \mathrm{Q}$$



$-a \le -2$ 그리고 $4 \le a$

$a \ge 2$ 그리고 $4 \le a$



$\therefore a \ge 4$

a의 최솟값은 4

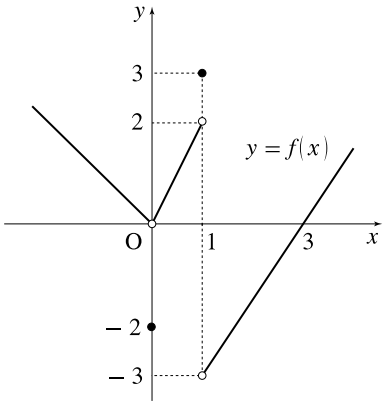
답 ④

풀이

미적111-

[3점-17년 수능]

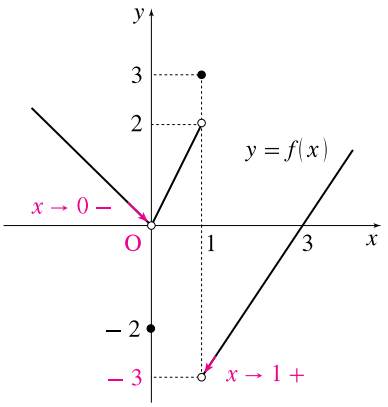
함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

풀이 11-



$\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1+} f(x) = -3$이므로

$$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$$
$$= 0 + (-3)$$
$$= -3$$

답 ③

풀이

미적125-

[3점-17년 수능]

$\int_0^2 (6x^2 - x)dx$의 값은?

① 15 ② 14 ③ 13 ④ 12 ⑤ 11

풀이 25-

$$\int_0^2 (6x^2 - x)dx$$

$$= \left[2x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$

$$= 2(8-0) - \frac{1}{2}(4-0)$$

$$= 16 - 2$$

$$= 14$$

답 ②

풀이

수204-

[3점-17년 수능]

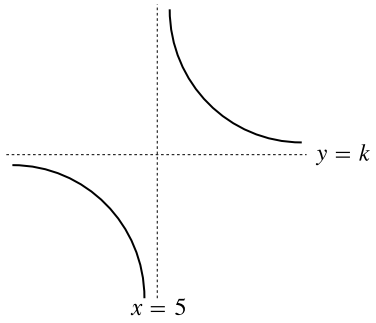
좌표평면에서 함수 $y=\frac{3}{x-5}+k$의 그래프가
직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

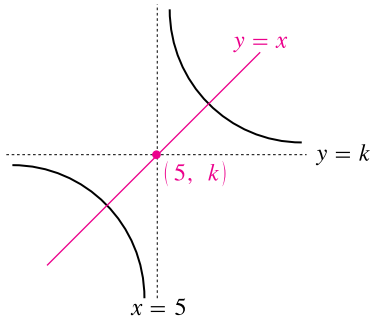
풀이○4-

유리함수 $y=\frac{3}{x-5}+k$의 그래프는

$x=5,\ y=k$를 점근선으로 하지요.



이 그래프가 $y=x$에 대하여 대칭이려면



직선 $y=x$가 점 $(5,\ k)$를 지나야 합니다.

$\therefore k=5$

답 ⑤

풀이

수224-

[3점-17년 수능]

한 개의 주사위를 3번 던질 때, 4의 눈이 한 번만 나올 확률은?

① $\frac{25}{72}$ ② $\frac{13}{36}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{7}{18}$ ⑤ $\frac{29}{72}$

풀이 24-

겨우 3번 던진 걸 '같은 일을 반복했다'고 할 수 있나요?
고작 3번인데.. 꼭 독립시행의 확률을 써야 할까요?

네! (저는 뻔뻔하니까요.)

주사위 한 번 던질 때, 4가 나올 확률은 $\frac{1}{6}$
주사위 3번 던질 때, 4가 한 번만 나올 확률은
독립시행의 확률을 이용하면

$${}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{72}$$

답 ①

풀이

미적129-

[3점-17년 수능]

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = -2t + 4$$

이다. $t = 0$부터 $t = 4$까지 점 P가 움직인 거리는?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

풀이 29-

$\int_a^b v(t)dt$: 위치의 변화량 $\int_a^b |v(t)|dt$: 실제 움직인 거리

$v(t) = -2t + 4$이므로

$t = 0$부터 $t = 4$까지 움직인 거리는

$$\int_0^4 |-2t+4|dt$$

$$= \int_0^2 (-2t+4)dt + \int_2^4 (2t-4)dt$$

$$= \left[-t^2+4t\right]_0^2 + \left[t^2-4t\right]_2^4$$

$$= -4+8+(16-4)-4(4-2)$$

$$= 4 + 12 - 8$$

$$= 8$$

답 ①

풀이

수221-

[3점-17년 수능]

어느 학교의 전체 학생은 360명이고, 각 학생은 체험 학습 A, 체험 학습 B 중 하나를 선택하였다. 이 학교의 학생 중 체험 학습 A를 선택한 학생은 남학생 90명과 여학생 70명이다. 이 학교의 학생 중 임의로 뽑은 1명의 학생이 체험 학습 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 남학생일 확률은 $\frac{2}{5}$이다.
이 학교의 여학생의 수는?

① 180 ② 185 ③ 190 ④ 195 ⑤ 200

풀이 21-

문제를 읽고 표를 만들면

	A	B	계
남	90		
여	70		
계			360

빈칸을 몇 개 채울 수 있습니다.

	A	B	계
남	90	a	
여	70	b	
계	160	200	360

조건부확률이 하나 주어졌군요.

임의로 뽑은 1명이

B를 선택한 학생일 때, 그 학생이 남학생일 확률이 $\frac{2}{5}$

$$P(\text{남}\,|\,B)=\frac{2}{5}$$

$$\frac{n(\text{남}\cap B)}{n(B)}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{a}{200}=\frac{2}{5}$$

$$5a=400$$

$$a=80$$

$$\therefore b=200-80=120$$

따라서 여학생의 수는

$$70+b=70+120=190$$

답 ③

풀이

미적112-

[4점-17년 수능]

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6 & (x<2) \\ 1 & (x\geq 2) \end{cases}$$

$$g(x)=ax+1$$

에 대하여 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때,

상수 a의 값은?

① $-\frac{5}{4}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

풀이 12-

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6 & (x<2) \\ 1 & (x\geq 2) \end{cases}$$

$$g(x)=ax+1$$

따라서

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases} \dfrac{ax+1}{x^2-4x+6} & (x<2) \\ \dfrac{ax+1}{1} & (x\geq 2) \end{cases}$$

이 중에서 $\dfrac{ax+1}{x^2-4x+6}$은 분모에 x가 있으니 유리함수 아닐까?
유리함수는 점근선에서 불연속인데.. 점근선도 따져야 하나?
그러나 학생 여러분은 걱정을 붙들어 매시라.
모름지기 유리함수의 점근선은 분모 $=0$일 때 발생하거늘
이 함수의 분모는 $x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$ 이므로
애시당초 점근선이 생길 수가 없소이다.

따라서 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체에서 연속이려면
$x=2$에서만 연속이면 됩니다.

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(2)}{f(2)}$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{ax+1}{x^2-4x+6} = \lim_{x\to 2+}\frac{ax+1}{1} = \frac{a\cdot 2+1}{1}$$

$$\frac{2a+1}{4-8+6} = 2a+1 \qquad = 2a+1$$

$$\frac{2a+1}{2} = 2a+1$$

$$2a+1 = 4a+2$$

$$-2a = 1$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

답 ④

풀이

수205-

[4점-17년 수능]

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2의 값은?

(가) $a_6 + a_8 = 0$

(나) $|a_6| = |a_7| + 3$

① -15 ② -13 ③ -11 ④ -9 ⑤ -7

풀이○5-

수열 $\{a_n\}$은 공차 $d > 0$인 등차수열입니다.

(가) $a_6 + a_8 = 0$

$(a + 5d) + (a + 7d) = 0$

$2a + 12d = 0$

$a + 6d = 0$

$a = -6d$

(나) $|a_6| = |a_7| + 3$

$|a + 5d| = |a + 6d| + 3$

$|-6d + 5d| = |-6d + 6d| + 3$

$|-d| = |0| + 3$

$d > 0$이므로 $-d < 0$

$-(-d) = 3$

$\therefore d = 3$

$\therefore a = -6(3) = -18$

따라서

$a_2 = a + d$

$= -18 + 3 = -15$

답 ①

풀이

수229-

[4점-17년 수능]

어느 농가에서 생산하는 석류의 무게는 평균이 m, 표준편차가 40인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농가에서 생산하는 석류 중에서 임의추출한, 크기가 64인 표본을 조사하였더니 석류 무게의 표본평균의 값이 $\overline{x}$이었다. 이 결과를 이용하여, 이 농가에서 생산하는 석류 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간을 구하면 $\overline{x}-c \le m \le \overline{x}+c$이다. c의 값은?
(단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.58) = 0.495$로 계산한다.)

① 25.8 ② 21.5 ③ 17.2 ④ 12.9 ⑤ 8.6

풀이 29-

음.. 이건 그냥 공식확인 문제인데.. 왜 4점인 거죠? (#좋으면서)

신뢰도 99%로 모평균 m을 추정하는 식은

$$\bar{x} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\sigma = 40,\ n = 64$이니까

$$\bar{x} - 2.58\frac{40}{\sqrt{64}} \le m \le \bar{x} + 2.58\frac{40}{\sqrt{64}}$$

$$\bar{x} - 2.58(5) \le m \le \bar{x} + 2.58(5)$$

$$\bar{x} - 12.9 \le m \le \bar{x} + 12.9$$

이게 뭐얔!

$$c = 12.9$$

답 ④

풀이

미적106-

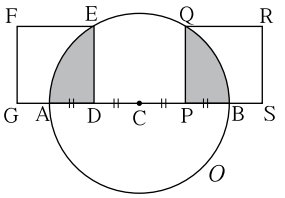
[4점-17년 수능]

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원의 중심을 C라 하고, 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 각각 D, P라 하자. 선분 AC의 수직이등분선과 선분 BC의 수직이등분선이 원 O의 위쪽 반원과 만나는 점을 각각 E, Q라 하자. 선분 DE를 한 변으로 하고 원 O와 점 A에서 만나며 선분 DF가 대각선인 정사각형 DEFG를 그리고, 선분 PQ를 한 변으로 하고 원 O와 점 B에서 만나며 선분 PR가 대각선인 정사각형 PQRS를 그린다. 원 O의 내부와 정사각형 DEFG의 내부의 공통부분인 ⏍ 모양의 도형과 원 O의 내부와 정사각형 PQRS의 내부의 공통부분인 ⏏ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

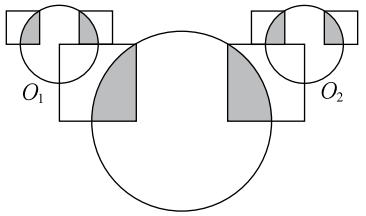
그림 R_1에서 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{DE}$인 원 O_1, 점 R를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{PQ}$인 원 O_2를 그린다. 두 원 O_1, O_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 ⏍ 모양의 2개의 도형과 ⏏ 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

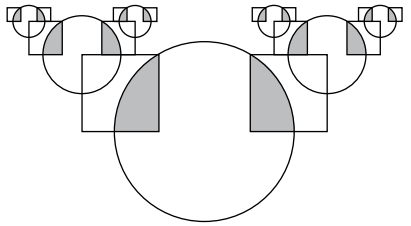
R_1



R_2



R_3



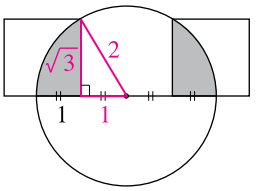
⋮ ⋮

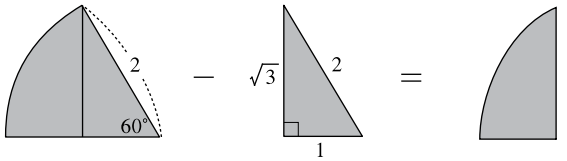
① $\frac{12\pi-9\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{8\pi-6\sqrt{3}}{5}$ ③ $\frac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$

④ $\frac{28\pi-21\sqrt{3}}{10}$ ⑤ $\frac{16\pi-12\sqrt{3}}{5}$

풀이○6-

① $S_1 : R_1$의 넓이





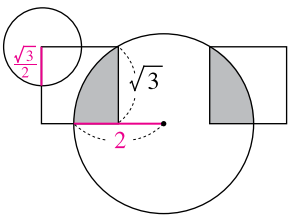
$\pi(2)^2 \times \frac{60}{360}$ $\quad$ $\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3}$

$= \frac{2}{3}\pi$ $\quad$ $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$S_1 = 2 \times \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}}$$

② $S_2 : R_2$의 넓이



큰 원과 작은 원의

반지름 길이비는 $2 : \frac{\sqrt{3}}{2}$

넓이비는 $2^2 : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4 : \frac{3}{4} = 1 : \frac{3}{16}$

따라서 R_2에 추가되는 도형 하나의 넓이는

$\frac{3}{16}S_1$

R_2에는 R_1과 닮은꼴 도형이 2개 추가되므로

$$S_2 = S_1 + 2\left(\frac{3}{16}S_1\right)$$

$$= \boxed{S_1 + \frac{3}{8}S_1}$$

더 안 해봐도 되죠?

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1 - \frac{3}{8}}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}}{\frac{5}{8}}$$

$$= \frac{32\pi - 24\sqrt{3}}{15}$$

답 ③

풀이

미적 109-

[4점-17년 수능]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 09-

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$$

함수의 극한.. 늘 하던대로 $x=a$를 대입해서 극한을 구했더니

$$\frac{f(a)-(a-a)}{f(a)+(a-a)}$$

$$=\frac{f(a)}{f(a)}=1$$

응? $\frac{3}{5}$ 아니네? 왜 $\frac{3}{5}$이 안 나오지?

$\frac{0}{0}$꼴의 극한인 모양이죠. 약분해서 극한 구하면 $\frac{3}{5}$이 나올 거구요.

즉,

$$f(a)=0$$

일 거란 말씀.

따라서 최고차항 계수가 1인 이차함수 $f(x)$는

$$f(x)=(x-a)(x-\cdots)$$

라고 쓸 수 있겠군요.

$$f(x)=(x-a)(x-b) \quad \cdots\rightarrow (\text{i})$$

라고 합시다. 그러면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)+(x-a)}=\frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}\{(x-b)-1\}}{\cancel{(x-a)}\{(x-b)+1\}}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{(a-b)-1}{(a-b)+1}=\frac{3}{5}$$

$$5(a-b)-5=3(a-b)+3$$

$$2(a-b)=8$$

$$a-b=4$$

질문은 $f(x)=0$의 두 근의 차 $|\alpha-\beta|$를 구하라는 건데

(i)에서 $f(x)=0$의 두 근은 a, b이지요. 따라서 두 근의 차는

$$|a-b|=4$$

답 ④

풀이

수217-

[4점-17년 수능]

좌표평면 위의 한 점 $(x,\ y)$에서 세 점 $(x+1,\ y)$, $(x,\ y+1)$, $(x+1,\ y+1)$ 중 한 점으로 이동하는 것을 점프라 하자.

점프를 반복하여 점 $(0,\ 0)$에서 점 $(4,\ 3)$까지 이동하는 모든 경우 중에서, 임의로 한 경우를 선택할 때 나오는 점프의 횟수를 확률변수 X라 하자. 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, 각 경우가 선택되는 확률은 동일하다.)

점프를 반복하여 점 $(0,\ 0)$에서 점 $(4,\ 3)$까지 이동하는 모든 경우의 수를 N이라 하자. 확률변수 X가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 값을 k라 하면 $k=$ (가) 이고, 가장 큰 값은 $k+3$이다.

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{1}{N}\times\frac{4!}{3!}=\frac{4}{N}$$

$$\mathrm{P}(X=k+1)=\frac{1}{N}\times\frac{5!}{2!2!}=\frac{30}{N}$$

$$\mathrm{P}(X=k+2)=\frac{1}{N}\times \text{(나)}$$

$$\mathrm{P}(X=k+3)=\frac{1}{N}\times\frac{7!}{3!4!}=\frac{35}{N}$$

이고

$$\sum_{i=k}^{k+3}\mathrm{P}(X=i)=1$$

이므로 $N=$ (다) 이다.

따라서 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=k}^{k+3}\{i\times\mathrm{P}(X=i)\}=\frac{257}{43}$$

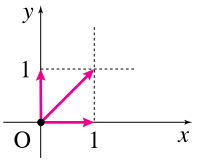
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 $a,\ b,\ c$라 할 때, $a+b+c$의 값은?

① 190 ② 193 ③ 196 ④ 199 ⑤ 202

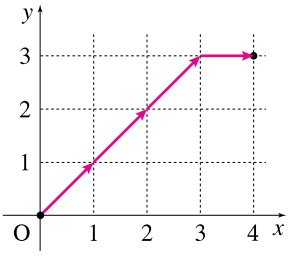
풀이 17-

확률이나 평균같은 말이 나오지만.. 사실은 경우의 수 문제입니다.

1. 점이 점프하는 방법은 3가지입니다.
오른쪽, 위쪽 그리고 대각선
빨리 가려면 대각선으로 가야죠.



2. (가)를 찾아라!
(0, 0)에서 (4, 3)까지
가장 적은 횟수로 이동하려면
예컨데 오른쪽 그림처럼
대각선 점프를 최대한 많이
해야합니다. 즉,

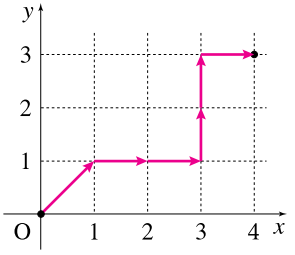


↗ 3번, → 1번이므로 4번만에 갈 수 있군요.

$\therefore \boxed{k=4}$ ⋯▸ (가)

(나)를 찾아라!
$X=k+2$인 경우란.. (가)에서 구한 최소이동횟수 k번보다 2번 더 이동해서 (4, 3)에 도착하는 경우입니다.
예컨데 오른쪽 그림처럼
대각선 이동을 1번만 하는 경우
이지요. 이동하는 방법의 수는
↗ 1번, → 3번, ↑ 2번이므로

$\frac{6!}{3!2!}=\boxed{60}$ ⋯▸ (나)



(다)를 찾아라!

$$\sum_{i=k}^{k+3} P(X=i)=1$$

전체 확률이 1이란 걸 이용하란 말이군요.
증명에서 구한 4개의 확률을 모두 구합시다.

$$\frac{4}{N}+\frac{30}{N}+\frac{\boxed{60}}{N}+\frac{35}{N}=1$$

$$\frac{129}{N}=1$$

$N=\boxed{129}$ ⋯▸ (다)

3. 따라서
$a+b+c=4+60+129=193$

답 ②

풀이

미적128-

[4점-17년 수능]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가진다. (단, k는 상수이다.)

(나) 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여

$$\int_0^t |f'(x)|dx = f(t)+f(0)$$

이다.

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $\int_0^k f'(x)dx < 0$

ㄴ. $0 < k \le 1$

ㄷ. 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

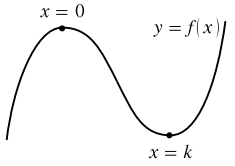
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이 28-

(가) $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 그래프의 개형은 오른쪽 같습니다.



(나) 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여

$$\int_0^t |f'(x)|dx = f(t)+f(0)$$

적분구간에 변수 t가 있으니.. 양변을 t에 대해 미분할까요?

1보다 큰 모든 실수 t에 대하여

$$\frac{d}{dt}\int_0^t |f'(x)|dx = \frac{d}{dt}\{f(t)+f(0)\}$$

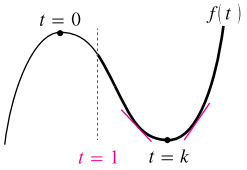
$$|f'(t)| = f'(t)+0$$

$$|f'(t)| = f'(t)$$

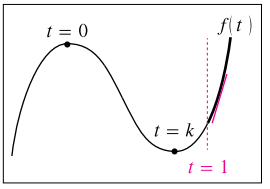
$$\therefore f'(t)\geq 0 \quad (t>1)$$

흠.. $t>1$일 때, '기울기 $f'(t)$가 항상 0 이상'이라고 합니다.

그래프에서 $t=1$의 위치가..



이게 아니고



⋯▸ (i)

이거란 말이죠.

이제 〈보기〉를 검토합시다.

ㄱ. $\int_0^k f'(x)dx < 0$

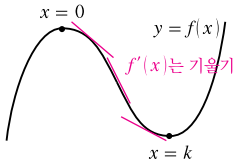
그래프에서 보듯

$0\leq x\leq k$에서는 항상

$f'(x)<0$

입니다. 따라서

$$\int_0^k f'(x)dx < 0$$ (참!)



ㄴ. 그래프 (i)에서

$0<k\leq 1$ (참!)

ㄷ. 극솟값이 0이라.. 그래프 (i)을 보면 극솟값은 $f(k)$인데..

안 해본게 뭐 있죠? (나)를 정적분 해볼까요?

$$\int_0^t |f'(x)|dx = f(t)+f(0)$$

그래프 (i)을 보면, $0\leq x\leq k$에서 $f'(x)\leq 0$

$x>k$에서 $f'(x)\geq 0$ 입니다. 따라서

$$-\int_0^k f'(x)dx+\int_k^t f'(x)dx = f(t)+f(0)$$

$\int f'(x)\,dx = f(x)+C$이므로

$$-\left[f(x)\right]_0^k+\left[f(x)\right]_k^t = f(t)+f(0)$$

$$-f(k)+f(0)+f(t)-f(k) = f(t)+f(0)$$

$$\cancel{f(0)}+\cancel{f(t)}-2f(k) = \cancel{f(t)}+\cancel{f(0)}$$

$$-2f(k)=0$$

$$\therefore f(k)=0$$

극솟값 $f(k)$는 0입니다. (참!)

답 ⑤

[4점-17년 수능]

좌표평면에서 함수

$$f(x)=\begin{cases}-x+10 & (x<10)\\ (x-10)^2 & (x\geq 10)\end{cases}$$

과 자연수 n에 대하여 점 $(n,\ f(n))$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_n이 있다. x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 아랫부분에 있는 모든 점의 개수를 A_n, 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 윗부분에 있는 모든 점의 개수를 B_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{20}(A_n-B_n)$의 값은?

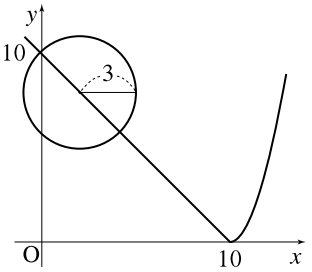
① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

풀이 07-

우리야.. 나오면 풀어야 하는 사람이긴 하지만..
이런 문제 내려면, 문제지 여백에 모눈종이라도 그려주든가. 쯧!

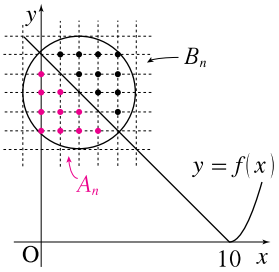
점의 개수 문제가 다 그렇듯, 이 문제도 $n = 1, 2, 3, \cdots$일 때의 점의 개수를 일일이 세어보는 겁니다. 규칙이 나올 때까지..

$$f(x) = \begin{cases} -x + 10 & (x < 10) \\ (x-10)^2 & (x \geq 10) \end{cases}$$

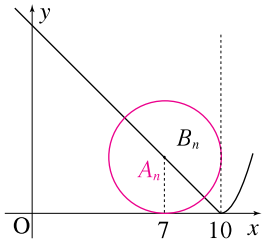


$f(x)$의 아랫 부분의 점의 개수를 A_n
$f(x)$의 윗 부분의 점의 개수를 B_n
이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20}(A_n - B_n) = ?$

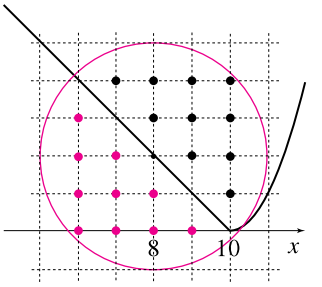
① $n = 1$일 때
그림을 그리고, 점을 세다 보니..
$f(x)$가 '직선'일 때는
$f(x)$ 윗 부분의 점의 개수와
$f(x)$ 아랫 부분의 점의 개수가
같을 수 밖에 없겠네요.
$\therefore (A_1 - B_1) = 0$



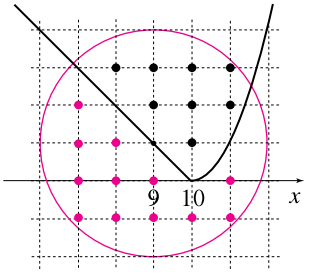
그런데 언제까지 $A_n = B_n$일까요?
그림을 그려보니 $n = 7$일 때까지
$A_n = B_n$일 것은 분명합니다.
$\therefore \boxed{\sum_{n=1}^{7}(A_n - B_n) = 0}$



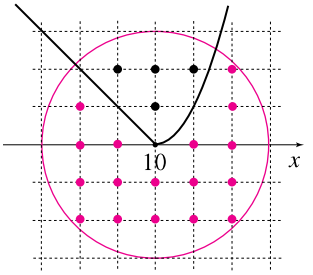
② $n = 8$일 때
애매해서 그려봤는데
이때도 $A_8 = B_8 = 10$이군요.
$\therefore \boxed{(A_8 - B_8) = 0}$



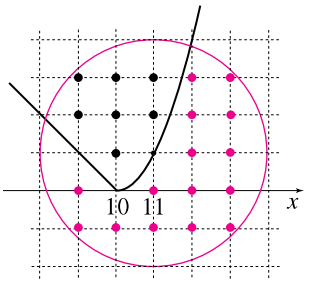
③ $n = 9$일 때
그림을 잘 그려야 합니다.
$A_9 = 12, \quad B_9 = 8$
$\therefore \boxed{(A_9 - B_9) = 4}$



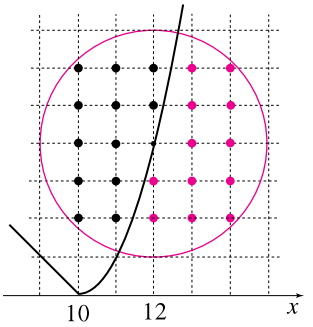
④ $n = 10$일 때
모눈종이가 절실하다.
$A_{10} = 17, \quad B_{10} = 4$
$\therefore \boxed{(A_{10} - B_{10}) = 13}$



⑤ $n = 11$일 때
모눈종이가 필요하다고.
$A_{11} = 15, \quad B_{11} = 7$
$\therefore \boxed{(A_{11} - B_{11}) = 8}$



⑥ $n = 12$일 때
모눈종이.. 모눈종이.. 모눈종이..
$A_{12} = 12, \quad B_{12} = 12$
$\therefore \boxed{(A_{12} - B_{12}) = 0}$
어랏? 다시 0이야?



⑦ $n = 13$과 그 이후
$n = 13$부터는 $f(x)$가 거의 '직선'에 가까운 모양이 됩니다.
그러니까 그냥
$(A_n - B_n) = 0$
이라고 합시다. (이만큼 했으면 할 만큼 했다고 본다.)

따라서

$$\sum_{n=1}^{20}(A_n - B_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{8}(A_n - B_n) + (A_9 - B_9) + (A_{10} - B_{10}) + (A_{11} - B_{11}) + \sum_{n=12}^{20}(A_n - B_n)$$

$$= \quad 0 \quad + \quad 4 \quad + \quad 13 \quad + \quad 8 \quad + \quad 0$$

$$= 25$$

답 ④

미적115-

[3점-17년 수능]

함수 $f(x)=x^3+3x^2+3$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오.

풀이 15-

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f'(2) = 3(2)^2 + 6(2) = 24$

답 24

풀이

수201-

[3점-17년 수능]

전체집합 $U=\{x \mid x$는 9 이하의 자연수 $\}$의 두 부분집합

$$A=\{3,\ 6,\ 7\},\ B=\{a-4,\ 8,\ 9\}$$

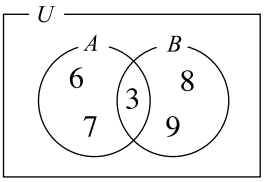
에 대하여 $A\cap B^C=\{6,\ 7\}$이다. 자연수 a의 값을 구하시오.

풀이○1-

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A = \{3, 6, 7\}, \quad B = \{a - 4, 8, 9\}$

$A \cap B^C = A - B$
$= \{6, \ 7\}$

벤 다이어그램을 그려면 풀립니다.



$\therefore a - 4 = 3$
$a = 7$

답 7

풀이

수206-

[3점-17년 수능]

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x+2$에 대하여 $\sum_{k=1}^{15} f(2k)$의 값을 구하시오.

풀이 06-

$f(x)=\frac{1}{2}x+2$이므로

$$\sum_{k=1}^{15} f(2k)$$
$$=\sum_{k=1}^{15}\left\{\frac{1}{2}(2k)+2\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{15}(k+2)$$
$$=\sum_{k=1}^{15}k+\sum_{k=1}^{15}2$$
$$=\frac{15\cdot 16}{2}+2(15)$$
$$=120+30$$
$$=150$$

답 150

풀이

미적117-

[4점-17년 수능]

곡선 $y = x^3 - ax + b$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이다. 두 상수 $a,\ b$에 대하여 $a + b$의 값을 구하시오.

풀이 17-

$y = x^3 - ax + b$

$y' = 3x^2 - a$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선은

$(y-1) = (3\cdot 1^2 - a)(x-1)$

$y = (3-a)x - (3-a) + 1$

$y = (3-a)x + a - 2$

이 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$(3-a)\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

$3 - a = 2$

$a = 1$

점 $(1,\ 1)$은 곡선 $y = x^3 - 1\cdot x + b$ 위의 점이므로

$1 = 1^3 - 1 + b$

$b = 1$

따라서

$a + b = 1 + 1 = 2$

답 2

풀이

수217-

[4점-17년 수능]

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오.

(가) $a+b+c=7$

(나) $2^a \times 4^b$은 8의 배수이다.

풀이 17-

1. 조건(가)만 보면 쉽죠.

$a+b+c=7$을 만족시키는 음 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 개수

전형적인 중복조합이지요.

$${}_3\mathrm{H}_7 = {}_{3+7-1}\mathrm{C}_7 = {}_9\mathrm{C}_7 = 36$$

그런데 a, b, c는 조건(나)도 만족시켜야 한다네요.

$2^a \times 4^b$는 8의 배수

$\Longleftrightarrow 2^a \times 2^{2b}$는 2^3의 배수

$\Longleftrightarrow 2^{a+2b} = 2^3 \cdot m$ (m은 자연수)

그런데 좌변이 2^{a+2b}이므로 우변의 m도 2^X꼴이겠지요.

$\Longleftrightarrow 2^{a+2b} = 2^3 \cdot 2^n$ (n은 음 아닌 정수)

$\Longleftrightarrow a+2b = 3+n$

이건 부등식으로 바꿀 수 있습니다. 요렇게요.

$\Longleftrightarrow a+2b \geq 3$

2. 이 부등식을 만족시키는 a, b를 써볼까요?

$$(a,\ b) = (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ \cdots$$

너무 많다. 하기 싫다.

이럴 땐 여집합을 구합시다.

$a+2b < 3$인 경우를 찾자는 소립니다.

$$(a,\ b) = (0,\ 0)$$
$$(0,\ 1)$$
$$(1,\ 0)$$
$$(2,\ 0)$$

4가지가 전부입니다. 따라서

조건(나) $a+2b \geq 3$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$36-4=32$ (가지)

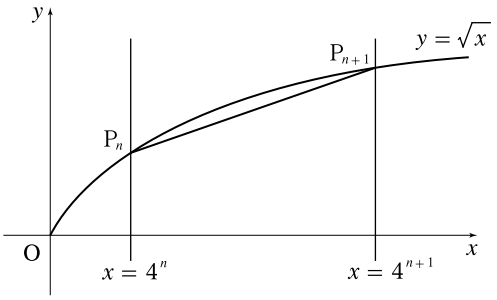
답 32

풀이

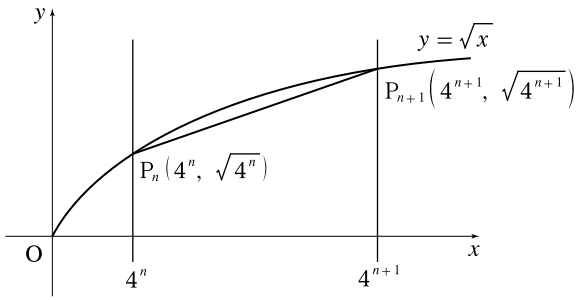
미적102-

[4점-17년 수능]

자연수 n에 대하여 직선 $x = 4^n$이 곡선 $y = \sqrt{x}$와 만나는 점을 P_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 길이를 L_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$의 값을 구하시오.



풀이○2-



$$P_n(4^n,\ \sqrt{4^n})=(4^n,\ \sqrt{2^{2n}})=(4^n,\ 2^n)$$

$$P_{n+1}(4^{n+1},\ \sqrt{4^{n+1}})=(4^{n+1},\ \sqrt{2^{2n+2}})=(4^{n+1},\ 2^{n+1})$$

$$L_n=\sqrt{(4^{n+1}-4^n)^2+(2^{n+1}-2^n)^2}$$
$$=\sqrt{(4\cdot 4^n-4^n)^2+(2\cdot 2^n-2^n)^2}$$
$$=\sqrt{(3\cdot 4^n)^2+(2^n)^2}$$
$$=\sqrt{9\cdot 16^n+4^n}$$

따라서 구하는 극한은

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{9\cdot 16^{n+1}+4^{n+1}}}{\sqrt{9\cdot 16^n+4^n}}\right)^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\cdot 16^{n+1}+4^{n+1}}{9\cdot 16^n+4^n}$$

$\frac{\infty}{\infty}$꼴이므로 분모의 최대밑항 16^n으로 분자, 분모를 나눕시다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\cdot 16+4\left(\frac{4}{16}\right)^n}{9+\left(\frac{4}{16}\right)^n}$$
$$=\frac{9\cdot 16+0}{9+0}$$
$$=16$$

답 16

풀이

수228-

[4점-17년 수능]

확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(10) > f(20)$

(나) $f(4) < f(22)$

m이 자연수일 때, $\mathrm{P}(17 \le X \le 18)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

풀이 28–

확률변수 X는 정규분포 $N(m,\ 5^2)$를 따릅니다.
그런데 질문이

$$P(17 \le X \le 18) = P\left(\frac{17-m}{5} \le Z \le \frac{18-m}{5}\right)$$

을 구하라는 거니까.. m부터 구해야 함.

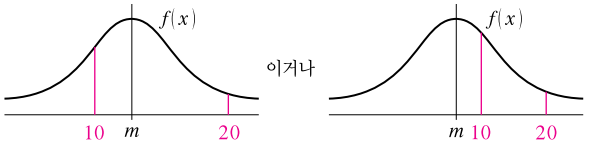
주어진 힌트는

(가) $f(10) > f(20)$

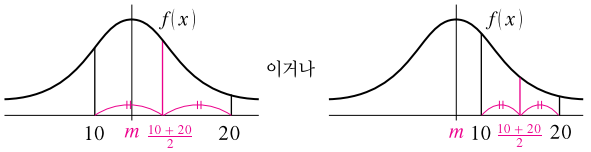
(나) $f(4) < f(22)$

이게 다야? 헐.. 어쩌라고..
(머리는 아무 생각 없지만 어느새 나의 손은 그래프를 그리고..)

(가) $f(10) > f(20)$



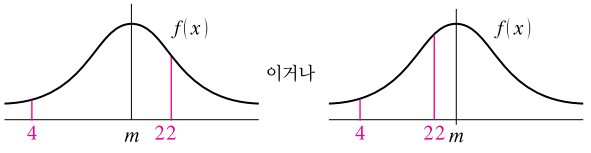
여기에서 뭔가 m에 관한 식을 뽑아내야 하는데..

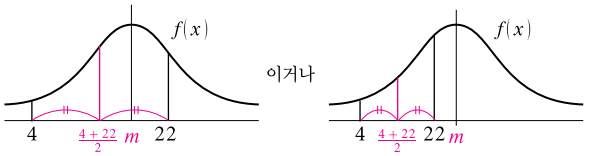


두 경우 모두 $m < \dfrac{10+20}{2}$

$\therefore \boxed{m < 15}$ ⋯➝ (i)

(나) $f(4) < f(22)$





두 경우 모두 $\dfrac{4+22}{2} < m$

$\therefore \boxed{13 < m}$ ⋯➝ (ii)

(i),(ii)에서 $13 < m < 15$
그런데 m은 자연수이므로

$m = 14$

구하는 확률은

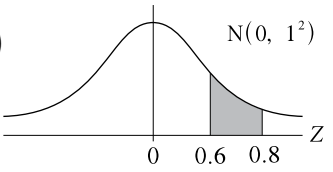
$$a = P\left(\frac{17-14}{5} \le Z \le \frac{18-14}{5}\right)$$

$$= P\left(\frac{3}{5} \le Z \le \frac{4}{5}\right)$$

$$= 0.288 - 0.226$$

$$= 0.062$$

$\therefore 1000a = 62$



답 62

미적121-

[4점-17년 수능]

실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $4f'(x)+12x-18=(f'\circ g)(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오.

풀이 21-

$f(x)=x^3-3x^2+6x+k$

$f'(x)=3x^2-6x+6$

$g(x)=f^{-1}(x)$라고 하는데.. 이 역함수 못 구하죠. 어떻게든 역함수를 구하지 말고 풀어봅시다.

1. 구해야 하는 건

$4f'(x)+12x-18=(f'\circ g)(x)$가 $[0,\ 1]$에서 실근 가질 조건

입니다. 음.. 역함수에 함성함수까지..

아무 생각 안 나죠? 이럴 땐 멍 때리지 말고 대입!

$$4(3x^2-6x+6)+12x-18=f'(g(x))$$

$$12x^2-24x+24+12x-18=3\{g(x)\}^2-6g(x)+6$$

$$12x^2-12x+\cancel{6}=3\{g(x)\}^2-6g(x)+\cancel{6}$$

$$4x^2-4x=\{g(x)\}^2-2g(x)$$

$$\{g(x)\}^2-2g(x)-(4x^2-4x)=0$$

응? 인수.. 분해?

$$\{g(x)\}^2-2g(x)-2x(2x-2)=0$$

$$\{g(x)-2x\}\{g(x)+(2x-2)\}=0$$

$\therefore g(x)=2x$ 또는 $g(x)=-(2x-2)$

2. 이제 질문이

$g(x)=2x$ 또는 $g(x)=-2x+2$가 $[0,\ 1]$에서 실근 가질 조건

으로 바뀌었습니다.

① $g(x)=2x$가 $[0,\ 1]$에서 실근 가질 조건

$\Longleftrightarrow f^{-1}(x)=2x$가 $[0,\ 1]$에서 실근 가질 조건

$\Longleftrightarrow x=f(2x)$가 $[0,\ 1]$에서 실근 가질 조건

$\Longleftrightarrow x=(2x)^3-3(2x)^2+6(2x)+k$가 $[0,\ 1]$에서 실근 가질 조건

$\Longleftrightarrow 8x^3-12x^2+11x+k=0$이 $[0,\ 1]$에서 실근 가질 조건

이때! 불현듯 떠오르는 사잇값의 정리.

함수 $f(x)$가 연속이면

$f(a)f(b)<0$이면 (즉, $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 다르면)

$f(c)=0$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

$h_1(x)=8x^3-12x^2+11x+k$라고 하면

$h_1(x)=0$이 $[0,\ 1]$에서 실근을 가질 조건은

$$h_1(0)h_1(1)\le 0$$

$$k(8-12+11+k)\le 0$$

$$k(k+7)\le 0$$

$\therefore \boxed{-7\le k\le 0}$ ⋯➝(i)

② $g(x)=-2x+2$가 $[0,\ 1]$에서 실근 가질 조건

$\Longleftrightarrow f^{-1}(x)=-2x+2$가 $[0,\ 1]$에서 실근 가질 조건

$\Longleftrightarrow x=f(-2x+2)$가 $[0,\ 1]$에서 실근 가질 조건

$\Longleftrightarrow x=(-2x+2)^3-3(-2x+2)^2+6(-2x+2)+k$가 $[0,\ 1]$에서 실근 가질 조건

전개할까 말까 잠시 고민하다, 제정신 차리고 전개 안 하기로 함.

$h_2(x)=(-2x+2)^3-3(-2x+2)^2+6(-2x+2)+k-x$이면

$h_2(x)=0$이 실근을 가질 조건은

$$h_2(0)h_2(1)\le 0$$

$$\{(8-12+12)+k-0\}\{(0-0+0)+k-1\}\le 0$$

$$(k+8)(k-1)\le 0$$

$\therefore \boxed{-8\le k\le 1}$ ⋯➝(ii)

3. (i),(ii)에 의해

k의 최솟값 $m=-8$

k의 최댓값 $M=1$

$\therefore m^2+M^2=(-8)^2+(1)^2=65$

답 65